ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI KHOA HỌC

------✍📖✍-----

LÊ THỊ MINH HƯƠNG

HIỆU CHỈNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ NGƯỢC ĐƠN ĐIỆU MẠNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI KHOA HỌC

------✍📖✍-----

LÊ THỊ MINH HƯƠNG

HIỆU CHỈNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ NGƯỢC ĐƠN ĐIỆU MẠNH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số : 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

THÁI NGUYÊN, 2014

Mục lục

BẢNG KÝ HIỆU

$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
X	không gian Banach thực
X^*	không gian liên hợp của X
$\langle \xi, x \rangle$	giá trị của phiếm hàm ξ tại x
S_X	mặt cầu đơn vị của X
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền giá trị của toán tử A
H	không gian Hilbert thực
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
I	ánh xạ đơn vị
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$x_n \to x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x
$x_n \rightharpoonup x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x

Mở đầu

Trong luận văn này chúng tôi xét hệ phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh trong không gian Banach X: Tìm phần tử $x^0 \in X$ thỏa mãn

$$A_j(x^0) = f_j,\ j = 1, \dots, N, \tag{1}$$

ở đây $A_j : D(A_j) \subseteq X \to X^*$ (X^* là không gian liên hợp của X), $f_j \in X^*$, $N \geq 0$ là một số tự nhiên, $D(A_j)$ là ký hiệu tập xác định của toán tử A_j.

Ta xét hệ phương trình toán tử (1) trong trường hợp dữ kiện ban đầu (A_j, f_j) không được biết chính xác mà được cho xấp xỉ bởi (A_j^h, f_j^δ), thỏa mãn

$$\|f_j - f_j^\delta\| \leq \delta,\ \delta \to 0,\ j = 1, \dots, N, \tag{2}$$

và

$$\|A_j^h(x) - A_j(x)\| \leq hg(\|x\|),\ h \to 0,\ j = 1, \dots, N, \tag{3}$$

với $g(t)$ là một hàm không âm và bị chặn với $t \geq 0$.

Nếu không có các điều kiện đặc biệt đặt lên các toán tử A_j (chẳng hạn tính đơn điệu đều hoặc đơn điệu mạnh), thì mỗi phương trình toán tử $A_j(x) = f_j$ trong hệ (1) là một bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa nghiệm của bài toán không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Do đó, hệ phương trình toán tử (1) nói chung, cũng là một bài toán đặt không chỉnh. Để giải loại bài toán này, ta phải sử dụng những phương pháp giải ổn định, sao cho khi sai số của dữ kiện đầu vào càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán ban đầu.

Những phương pháp cơ bản được sử dụng rộng rãi để tìm nghiệm xấp xỉ của hệ phương trình toán tử (1) phải kể đến đó là phương pháp kiểu hiệu chỉnh lặp hoặc phương pháp kiểu hiệu chỉnh Tikhonov sau khi viết lại hệ phương trình toán tử (1) ở dạng phương trình toán tử

$$\mathbf{A}(x) = f,$$

ở đây

$$\mathbf{A} := (A_1, \ldots, A_N) : \bigcap_{j=1}^{N} D(A_j) =: D \to (X^*)^N$$

và $f := (f_1, \ldots, f_N)$. Các phương pháp này tỏ ra không hiệu quả khi số phương trình của hệ (1) lớn đồng thời việc tính toán các giá trị $A_j(x)$ và $A_j'(x)^*$ tỏ ra tốn kém. Để cải thiện tình hình này, phương pháp lặp kiểu Kaczmarz được nghiên cứu trên cơ sở dãy lặp xoay vòng cho mỗi phương trình trong (1) (xem [9], [10]). Một số cải biên của phương pháp này giải hệ phương trình toán tử (1) được nghiên cứu mới đây trong không gian Hilbert với mỗi toán tử A_j là liên tục yếu theo dãy và miền xác định $D(A_j)$ tương ứng là đóng yếu.

Năm 2006, để giải hệ phương trình toán tử (1) trong trường hợp $f_j = \theta$-phần tử không trong không gian X^* và A_j là các toán tử *hemi*-liên tục, đơn điệu và có tính chất thế năng với $D(A_j) = X$, Ng. Bường [7] đã đưa ra phương pháp hiệu chỉnh kiểu Browder-Tikhonov dạng:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} \alpha^{\mu_j} A_j^h(x) + \alpha U(x) = \theta, \\ &\mu_1 = 0 < \mu_j < \mu_{j+1} < 1,\ j = 2, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{4}$$

ở đây A_j^h là các toán tử *hemi*-liên tục, đơn điệu và là xấp xỉ của A_j thỏa mãn (3), U là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach

X, $\alpha > 0$ là một tham số dương, được gọi là tham số hiệu chỉnh. Những nghiên cứu tiếp theo của phương pháp này được phát triển trong [8], [11]. Chú ý rằng phương pháp Kaczmarz vốn là thuật toán tuần tự, nên khi số phương trình của hệ đủ lớn thì phương pháp này trở nên tốn kém trên một bộ xử lý đơn, trong khi phương pháp hiệu chỉnh (4) của Ng. Bường và một số cải biên của phương pháp có thể được sử dụng tính toán song song (xem [4], [5], [6]).

Mục đích của đề tài luận văn là nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử ngược đơn điệu mạnh trong không gian Banach. Cụ thể là nghiên cứu phương trình hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh, cách chọn tham số hiệu chỉnh và đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh trên cơ sở kết quả trong [8] và [11].

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về bài toán đặt không chỉnh, toán tử đơn điệu và hệ phương trình toán tử đơn điệu.

Chương 2 trình bày phương pháp hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử với toán tử ngược đơn điệu mạnh trong không gian Banach.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của cô giáo Tiến sĩ Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới cô.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Tác giả xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Lê Thị Minh Hương

Chương 1

Hệ phương trình toán tử đơn điệu

Chương này trình bày một số khái niệm và kết quả về phương trình và hệ phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh trong không gian Banach. Các kiến thức của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1], [2] và [3].

1.1 Bài toán đặt không chỉnh

1.1.1 Khái niệm về bài toán đặt không chỉnh

Chúng tôi trình bày khái niệm về bài toán đặt không chỉnh trên cơ sở xét một bài toán ở dạng phương trình toán tử

$$A(x) = f, \tag{1.1}$$

trong đó $A : X \to Y$ là một toán tử từ không gian Banach X vào không gian Banach Y, f là phần tử thuộc Y. Sau đây là một định nghĩa của Hadamard.

Định nghĩa 1.1. Cho A là một toán tử từ không gian Banach X vào không gian Banach Y. Bài toán (1.1) được gọi là *bài toán đặt chỉnh* (well-posed) nếu

1) phương trình $A(x) = f$ có nghiệm với mọi $f \in Y$;

2) nghiệm này là duy nhất; và

3) nghiệm phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu.

Nếu ít nhất một trong các điều kiện trên không thỏa mãn thì bài toán (1.1) được gọi là *bài toán đặt không chỉnh* (ill-posed).

Bài toán tìm nghiệm x phụ thuộc vào dữ kiện f, nghĩa là $x = R(f)$, được gọi là ổn định trên cặp không gian (X, Y) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho từ $\rho_Y(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ cho ta $\rho_X(x_1, x_2) \leq \varepsilon$, ở đây

$$x_i = R(f_i),\ x_i \in X,\ f_i \in Y,\ i = 1, 2.$$

Nhận xét 1.1. Một bài toán có thể đặt chỉnh trên cặp không gian này nhưng lại đặt không chỉnh trên cặp không gian khác.

Trong nhiều ứng dụng thì vế phải của (1.1) thường được cho bởi đo đạc, nghĩa là thay cho giá trị chính xác f, ta chỉ biết xấp xỉ f_δ của nó thỏa mãn $\|f_\delta - f\| \leq \delta$. Giả sử x_δ là nghiệm của bài toán (1.1) với f thay bởi f_δ (giả thiết rằng nghiệm tồn tại). Khi $\delta \to 0$ thì $f_\delta \to f$ nhưng với bài toán đặt không chỉnh thì x_δ nói chung không hội tụ đến x.

1.1.2 Ví dụ về bài toán đặt không chỉnh

Xét phương trình toán tử (1.1) với A là một ma trận vuông cấp $M = 7$ được xác định bởi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2,001 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2,001 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2,001 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2,001 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2,001 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2,001 \end{pmatrix}$$