ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ THƠM

TẬP THẶNG DƯ JULIA CỦA ÁNH XẠ NEWTON

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ THƠM

TẬP THẶNG DƯ JULIA CỦA ÁNH XẠ NEWTON

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60 46 01 12

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Tạ Duy Phượng

Thái Nguyên, 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

HOÀNG THỊ THƠM

TẬP THẶNG DƯ JULIA CỦA ÁNH XẠ NEWTON

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Mã số:

Người hướng dẫn khoa học: **PGS. TS. Tạ Duy Phượng**

THÁI NGUYÊN, 2014

Lời nói đầu

Sự tồn tại của các tập thặng dư Julia của các hàm phân thức bậc tối thiểu bằng 2 là một bài toán thú vị trong lý thuyết lặp các hàm phân thức. Makienko đã giả thuyết rằng một hàm phân thức có bậc tối thiểu là 2 không có tập thặng dư Julia khi và chỉ khi tập Fatou của nó có một thành phần hoàn toàn bất biến hoặc chỉ chứa hai thành phần. Nhưng cho tới nay mới chỉ có một số kết quả riêng lẻ trả lời cho câu hỏi này. Thí dụ, mới chỉ biết rằng giả thuyết đúng cho lớp các hàm phân thức có tập Julia liên thông địa phương. Ánh xạ Newton tạo ra dãy lặp của các hàm phân thức và do đó có thể nghiên cứu tập Julia của ánh xạ này như một ví dụ của hàm phân thức. Với mong muốn tìm hiểu một vấn đề thời sự và thú vị của giải tích phức và toán ứng dụng, tôi chọn: *Tập thặng dư Julia của ánh xạ Newton* làm đề tài luận văn cao học. Luận văn sẽ trình bày tổng quan về Tập thặng dư Julia của ánh xạ phân thức và ánh xạ Newton.
Nội dung của luận văn được chia thành 3 chương.
Chương 1: Nhắc lại một số lý thuyết liên quan như số phức, hàm phân thức, hàm giải tích, ánh xạ Newton của đa thức,...
Chương 2: Luận văn trình bày khái niệm cơ bản về tập Julia, tập Fatou, một số tính chất quan trọng của tập Julia và tập Fatou, nêu khái niệm về tập thặng dư Julia của ánh xạ phân thức, của ánh xạ Newton,...
Chương 3: Luận văn trình bày về giả thuyết Smale, tính hữu hiệu của phương pháp Newton và chứng minh một số định lý quan trọng trong chương này.
Hi vọng luận văn sẽ được các bạn sinh viên và học viên cao học tham khảo khi nghiên cứu lý thuyết ánh xạ lặp Newton và giả thuyết Smale.

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Tạ Duy Phượng. Tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô giáo trong nhà trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Toán ứng dụng đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS. Tạ Duy Phượng, người luôn chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tài liệu trong suốt quá trình thực hiện luận văn này.

Cuối cùng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới gia đình, người thân đã động viên và tạo điều kiện để tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 4 - 2014

Người viết Luận văn

Hoàng Thị Thơm

Mục lục

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, em nhắc lại một số lý thuyết liên quan như số phức, hàm phân thức, hàm giải tích, tính khả vi của hàm phức, ánh xạ Newton của đa thức,...

1.1 Số phức

Một số phức z có dạng $a + ib$ với $a, b \in \mathbb{R}$ (tập hợp số thực) và $i = \sqrt{-1}$. Tập tất cả các số phức được ký hiệu là $\mathbb{C}$. Biểu diễn lượng giác trong hệ toạ độ của số phức $z = a + ib$ là $z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ với $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là *modun* của z và khi $a \neq 0, \theta = \arctan\dfrac{b}{a}$ được gọi là *argument* của z.

Giả sử $u = \rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ và $v = \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ là hai số phức trong biểu diễn toạ độ cực. Khi đó, biểu diễn toạ độ cực của tích của $u.v$ là

$$uv = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big),$$

biểu diễn toạ độ cực của tổng $z = u + v$ là

$$\begin{aligned} z = u + v = \rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2} &= (\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2) + i(\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2) \\ &= |u + v|(\cos\theta + i\sin\theta); \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} &|z| = |u + v| \\ &= \sqrt{(\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2)^2 + (\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2)^2} \\ &= \sqrt{\rho_1^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) + \rho_2^2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2) + 2\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)} \\ &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}; \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2}{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}};$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2}{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}}.$$

1.2 Đa thức phức

Định nghĩa 1.2.1. *Một đa thức phức (hay đa thức với hệ số phức) $P(z)$ có bậc n (ký hiệu là $deg(P)$) là đa thức có dạng*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

với a_i là các số phức, $i = \overline{0,n}$, $a_n \neq 0$.

Nhận xét

(a) Nếu $n = 0$ thì P là hàm hằng,
(b) Nếu $n = 1$ thì P được gọi là đa thức bậc nhất,
(c) Nếu $n \geq 2$ thì P được gọi chung là đa thức phức.

Định nghĩa 1.2.2. *(Nghiệm của đa thức phức) Giả sử P là một đa thức phức. Một điểm $\xi \in \mathbb{C}$ được gọi là nghiệm (hoặc không điểm) của P nếu $P(\xi) = 0$.*

Định nghĩa 1.2.3. *(Điểm tới hạn và giá trị tới hạn) Cho P là một đa thức có bậc tối thiểu là hai, điểm $\xi \in \mathbb{C}$ được gọi là điểm tới hạn của P nếu $P^{'}(\xi) = 0$. Giá trị $\omega = P(\xi)$ với ξ là điểm tới hạn của P, được gọi là giá trị tới hạn của P.*

Định nghĩa 1.2.4. *(Đa thức phức monic) Một đa thức P được gọi là monic nếu hệ số cao nhất của P là 1, tức là*

$$P = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0.$$

Đa thức monic có dạng là $P(z) = \prod_{i=0}^{d}(z - z_i)$ với z_i $(i = \overline{1,n})$ là nghiệm của P.

1.3 Hàm phân thức

Định nghĩa 1.3.1. *(Hàm phân thức) Một hàm phân thức (hay ánh xạ phân thức) $R : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ là một hàm có dạng $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, với $P(z)$, $Q(z)$ là những đa thức khác 0.*

Ở đây, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (cũng được kí hiệu là $\mathbb{C}_\infty$) là mặt phẳng phức suy rộng, có tương ứng $1-1$ với một hình cầu tiếp xúc với mặt phẳng phức tại điểm A.

Khi ấy, điểm ∞ của mặt phẳng phức tương ứng với điểm A' xuyên tâm đối với A. Do đó, $\overline{\mathbb{C}}$ cũng được gọi là hình cầu phức.

Định nghĩa 1.3.2. (*Bậc của hàm phân thức*) *Bậc của hàm phân thức R được ký hiệu là $deg(R)$ và được định nghĩa là*

$$deg(R) = max\{deg(P), deg(Q)\}.$$

với $deg(P)$, $deg(Q)$ là bậc của đa thức P và Q.

Định nghĩa 1.3.3. (*Điểm cực của hàm phân thức*) *Cho R là hàm phân thức có dạng $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, với $P(z)$, $Q(z)$ là những đa thức khác 0. Một điểm $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ được gọi là điểm cực cô lập của R nếu z_0 là không điểm của Q và tồn tại lân cận $U(z_0)$, trong đó $Q(z) \neq 0, \forall z \neq z_0$.*

Cho R_1 và R_2 là hai hàm phân thức. Khi đó, *bậc của đa thức tích $R_1.R_2$* bằng $deg(R_1) \times deg(R_2)$.

Cho φ là một hàm phân thức có dạng $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ với $ad - bc \neq 0$. Khi ấy, φ là một hàm phân thức bậc 1 và φ được gọi là *ánh xạ Mobius hoặc phép biến đổi song tuyến tính.*

Ánh xạ Mobius là ánh xạ $1-1$ của mặt cầu phức lên chính nó. Do đó, hàm ngược của φ tồn tại và được ký hiệu là φ^{-1}.

Hợp của hai ánh xạ Mobius là ánh xạ Mobius. Thật vậy,

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

$$\psi(t) = \frac{a_1t+b_1}{c_1+d_1},$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(t)) = \varphi(z) &= \frac{a\frac{a_1t+b_1}{c_1t+d_1}+b}{c\frac{a_1t+b_1}{c_1t+d_1}+d}\\ &= \frac{(aa_1+bc_1)t+ab_1+bd_1}{(ca_1+dc_1)t+cb_1+dd_1}\\ &= \frac{At+B}{Ct+D}.\end{aligned}$$

Định lí 1.3.4. *Cho $T(z) = \dfrac{a}{z} + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$. Khi đó, T biến*

a. Một đường thẳng qua 0 lên một đường thẳng qua b,

b. Một đường thẳng không đi qua 0 lên một đường tròn đi qua b,

c. Một đường tròn qua 0 lên một đường tròn không đi qua b,

d. Một đường tròn không đi qua 0 lên một đường tròn không đi qua b.

Định lí 1.3.5. *Cho $T(z) = az + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$. Khi đó, T biến*
a. Một đường thẳng lên một đường thẳng,
b. Một đường tròn lên một đường tròn.

Hai định lí trên chỉ ra cho chúng ta tính chất quan trọng của ánh xạ Mobius.

Định lí 1.3.6. *Một ánh xạ Mobius biến đường tròn và đường thẳng thành đường tròn và đường thẳng.*

Chứng minh. Cho $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ là ánh xạ Mobius. Khi đó, $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ với $T_1(z) = cz + d$, $T_2(z) = \dfrac{1}{z}$, $T_3(z) = \left(b - \dfrac{ad}{c}\right)z + \dfrac{a}{c}$. Sử dụng các Định lí 1.3.4, Định lí 1.3.5 suy ra điều phải chứng minh. □

Định lí trên không đúng khi ánh xạ không phải là ánh xạ Mobius.

1.4 Liên hợp

Định nghĩa 1.4.1. (*Liên hợp-Conjugation, xem* [5] *trang* 36) *Cho R và S là hai ánh xạ phân thức, R và S được gọi là liên hợp đôi một* (*hoặc R và S là liên hợp*) *nếu tồn tại một ánh xạ Mobius φ thoả mãn $\varphi \circ R = S \circ \varphi$.*

Định nghĩa 1.4.2. (*Điểm bất động*) *Cho $R : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ là một ánh xạ , $\xi \in \overline{\mathbb{C}}$ là một điểm bất động của R nếu $R(\xi) = \xi$.*

Ví dụ 1.4.3. *a. Xét $P(z) = z^2 - z + 1$. Khi đó $P(z) = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = z$. Suy ra $z = 1$ là điểm bất động của P.*
b. Xét $P(z) = z^2 - 3z + 2$. Khi đó $P(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 3z + 2 = z \Leftrightarrow (z-2)^2 = 2$ $\Leftrightarrow z = 2 \pm \sqrt{2}$. Vậy P có hai điểm bất động là $z = 2 \pm \sqrt{2}$.

Định lí 1.4.4. *Cho R và S là hai ánh xạ phân thức. Giả sử, R và S là liên hợp sao cho: $\varphi \circ R = S \circ \varphi$. Khi đó, $\xi \in \overline{\mathbb{C}}$ là một điểm bất động của S nếu và chỉ nếu $\varphi^{-1}(\xi)$ là điểm bất động của R.*

Chứng minh. Giả sử, hai ánh xạ phân thức R và S là liên hợp đôi một. Và $\xi \in \overline{\mathbb{C}}$ là một điểm bất động của S, tức là $S(\xi) = \xi$. Vì $\varphi \circ R = S \circ \varphi$ nên $R = \varphi^{-1} \circ S \circ \varphi$. Vậy

$$R(\varphi^{-1}(\xi)) = \varphi^{-1} \circ S \circ \varphi(\varphi^{-1}(\xi)) = \varphi^{-1} \circ S(\xi) = \varphi^{-1}(\xi)$$

Suy ra, $\varphi^{-1}(\xi)$ là một điểm bất động của R. □