ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

------✍📖✍-----

LÝ MINH THÙY

XẤP XỈ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 2014

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Đỗ Văn Lưu. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn về sự tận tâm và nhiệt tình của Thầy trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Lý Minh Thùy

DANH MỤC KÝ HIỆU

X	Không gian Banach thực
H	Không gian Hilbert thực
$\emptyset$	Tập rỗng
$\forall x$	Với mọi x
$\exists x$	Tồn tại x
$D(T)$	Miền xác định của toán tử T
$\mathrm{Fix}(T)$	Tập các điểm bất động của toán tử T
$x_n \to x$	Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x
$x_n \rightharpoonup x$	Dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x

MỞ ĐẦU

Lý thuyết điểm bất động có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học như giải tích số, phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân, bài toán chấp nhận lồi, bài toán cân bằng . . . .

Cho H là một không gian Hilbert thực;C là một tập con lồi,đóng,khác rỗng của H; $T : C \to H$ là một ánh xạ phi tuyến. Điểm $x^* \in C$ thỏa mãn $Tx^* = x^*$ gọi là điểm bất động của ánh xạ T. Trong nhiều trường hợp, việc giải một phương trình được đưa về bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ thích hợp. Chẳng hạn nghiệm của phương trình toán tử $Ax = f$, ở đây $A : H \to H$ là một ánh xạ phi tuyến, f là phần tử thuộc H, là điểm bất động của ánh xạ S xác định bởi $Sx = Ax + x - f$ với $x \in H$.

Lý thuyết điểm bất động và vấn đề xấp xỉ điểm bất động là vấn đề thời sự, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Mục đích của đề tài luận văn này nhằm trình bày một số kết quả mới đây của Giáo sư Nguyễn Bường về xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert, bài toán điểm bất động và một số phương pháp xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ.

Trong chương 2, chúng tôi trình bày phương pháp xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Đóng góp chính của chúng tôi trong luận văn là đọc, dịch, tổng hợp kiến thức trong các tài liệu [2] và [3]. Toàn bộ phần chứng minh các định lý trong chương 2 được chúng tôi làm rõ từ các kết quả nghiên cứu đã công bố trong [2] và [3].

Chương 1

Bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn

Trong chương này, trước hết chúng tôi giới thiệu về không gian Hilbert thực, ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert nhằm trang bị những kiến thức cần thiết cho việc trình bày phương pháp xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn. Tiếp đó, chúng tôi trình bày về bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn và một số phương pháp lặp cổ điển giải bài toán này như phương pháp lặp Mann, phương pháp lặp Ishikawa và phương pháp lặp Halpern. Các kiến thức của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1]-[7].

1.1 Không gian Hilbert

Trong mục này, chúng tôi trình bày khái niệm và một số kết quả về không gian Hilbert thực H.

Định nghĩa 1.1. Cho H là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong H là một ánh xạ, ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $\langle x, x\rangle > 0, \quad \forall x \neq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \quad \forall x, y \in H;$

iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in H,\ \forall \alpha \in \mathbb{R};$

iv) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \quad \forall x, y, z \in H.$

Không gian tuyến tính H cùng với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot\rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert.

Nhận xét 1.1. i) Không gian tiền Hilbert là một không gian định chuẩn với chuẩn:

$$||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in H.$$

ii) Đẳng thức hình bình hành luôn thỏa mãn trong không gian tiền Hilbert H:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2), \quad \forall x, y \in H.$$

Ngược lại, nếu không gian định chuẩn X có chuẩn thỏa mãn đẳng thức hình bình hành thì trên đó ta có thể xây dựng một tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2), \quad \forall x, y \in X.$$

Khi đó X trở thành không gian tiền Hilbert.

iii) Trong không gian tiền Hilbert H bất đẳng thức Schwarz luôn thỏa mãn:

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||, \quad \forall x, y \in H.$$

Định nghĩa 1.2. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1. Các không gian $\mathbb{R}^n$, $L^2[a, b]$ là các không gian Hilbert với tích vô hướng được xác định tương ứng là:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt,\ x(t),\ y(t) \in L^2[a, b].$$

Định nghĩa 1.3. Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong không gian Hilbert H được gọi là *hội tụ yếu* đến phần tử $x \in H$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$, với mọi $y \in H$.

Định nghĩa 1.4. Tập hợp $C \subset H$ được gọi là *lồi* nếu

$$\forall x_1, x_2 \in C,\ \forall \lambda \in (0, 1) \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C.$$

Ví dụ 1.2. Trong không gian hữu hạn chiều, mặt phẳng, đoạn thẳng, đường thẳng, tam giác, hình cầu là các tập lồi.

Định nghĩa 1.5. Tập $C \subset H$ được gọi là *tập đóng* nếu mọi dãy hội tụ $\{x_n\} \subset C$ đều có giới hạn thuộc C, tức là

$$\Big\{\forall \{x_n\} \subset C : x_n \to x\Big\} \Rightarrow x \in C.$$

Ví dụ 1.3. Hình cầu đóng $\overline{B}(x, r)$ tâm x, bán kính r là tập đóng.

Bổ đề 1.1. *Giả sử H là không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi, đóng trong H và các điểm x, y, $z \in H$. Với một số thực a bất kỳ, tập hợp*

$$\Big\{v \in C : \|y - v\|^2 \le \|x - v\|^2 + \langle z, v\rangle + a\Big\}$$

là tập lồi đóng trong H.

1.2 Ánh xạ không giãn

Cho H là không gian Hilbert thực, $T : H \to H$ là một ánh xạ với miền xác định là $D(T)$, miền giá trị là $R(T)$.

Định nghĩa 1.6. Ánh xạ $T : H \to H$ được gọi là *liên tục Lipschitz* nếu tồn tại một hằng số $L > 0$ thỏa mãn

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D(T). \tag{1.1}$$

Số L được gọi là hằng số Lipschitz của T.

Nếu $L < 1$ thì T là ánh xạ co và nếu $L = 1$ thì T là ánh xạ không giãn, nghĩa là:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D(T). \tag{1.2}$$

Sau đây là khái niệm và một số tính chất của phép chiếu mêtric.

Định nghĩa 1.7. Cho C là một tập con lồi ,đóng của không gian Hilbert thực H, phép chiếu mêtric P_C từ H lên C cho tương ứng mỗi $x \in H$ với phần tử $P_C(x) \in C$ thỏa mãn

$$\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\| \quad \text{với mọi} \quad y \in C.$$

Bổ đề 1.2. *Cho C là tập con lồi, đóng trong không gian Hilbert thực H, với bất kì $x \in H$, tồn tại duy nhất $z \in C$ sao cho $||z-x|| \leq ||y-x||$, với mọi $y \in C$ và $z = P_C(x)$ nếu và chỉ nếu $\langle z - x, y - z\rangle \geq 0$, với mọi $y \in C$*

Định lý 1.1. *Nếu C là một tập con lồi ,đóng , khác rỗng trong không gian Hilbert H thì tồn tại một phần tử duy nhất x_0 của C sao cho*

$$\|x_0\| \leq \|x\| \quad \textit{với mọi} \quad x \in C.$$