ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN VĂN LINH

PHƯƠNG PHÁP SIÊU GRADIENT HIỆU CHỈNH CHO TOÁN TỬ LIÊN TỤC LIPSCHITZ VÀ NGƯỢC ĐƠN ĐIỆU MẠNH

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tác giả luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của GS. TS. Nguyễn Bường. Thầy đã giành nhiều thời gian chỉ bảo rất tận tình hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy và kính chúc thầy luôn luôn mạnh khỏe.

Tác giả cũng xin cảm ơn các quý thầy, cô khoa Toán - Tin, viện Toán học, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cũng như các thầy cô đã tham gia giảng dạy khóa cao học 2012 - 2014, lời cảm ơn sâu sắc nhất về công lao dạy dỗ mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích không chỉ trong khoa học mà còn cả trong cuộc sống.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các anh chị em học viên lớp Cao học toán K6 và bạn bè đồng môn đã giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và trong quá trình hoàn thiện luận văn thạc sĩ.

Cuối cùng, con xin cảm ơn bố mẹ. Nhờ có bố mẹ không quản gian khó, vất vả sớm khuya nhưng vẫn tạo mọi điều kiện tốt nhất để con có được thành quả ngày hôm nay.

Thái Nguyên, tháng 5-2014

Người viết luận văn

Nguyễn Văn Linh

Mở đầu

Bất đẳng thức biến phân đơn điệu là lớp bài toán nảy sinh từ nhiều vấn đề của toán học ứng dụng như phương trình vi phân, các bài toán vật lý toán và tối ưu hóa. Ngoài ra nhiều vấn đề thực tế như bài toán cân bằng mạng giao thông đô thị và mô hình cân bằng kinh tế đều có thể mô tả được dưới dạng của một bất đẳng thức biến phân đơn điệu. Rất tiếc rằng bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, nói chung, lại là *bài toán đặt không chỉnh*. Do tính không ổn định của bài toán đặt không chỉnh nên việc giải số của nó gặp khó khăn. Lý do là một sai số nhỏ trong dữ kiện của bài toán có thể dẫn đến một sai số lớn trong lời giải. Vì thế nảy sinh vấn đề tìm các phương pháp giải ổn định cho các bài toán đặt không chỉnh, sao cho khi sai số của dữ kiện đầu vào càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán ban đầu.

Mục đích của đề tài luận văn nhằm tìm hiểu và giới thiệu phương pháp siêu gradient hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân đơn điệu của giáo sư Nguyễn Bường trong [5] công bố năm 2008.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1 trình bày một số khái niệm và kiến thức liên quan đến không gian Hilbert, không gian Banach, toán tử đơn điệu; giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, đồng thời trình bày phương pháp siêu gradient và phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu.

Trong chương 2 chúng tôi trình bày phương pháp siêu gradient hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với toán tử liên tục Lipschitz và ngược đơn điệu mạnh trong không gian Hilbert.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn trực tiếp của GS. TS. Nguyễn Bường. Mặc dù, tác giả đã hết sức cố gắng nhưng do vấn đề được nghiên cứu là phức tạp và mới mẻ, lại do thời gian có hạn và kinh nghiệm nghiên cứu còn hạn chế nên khó tránh khỏi thiếu sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2014

Học viên

Nguyễn Văn Linh

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân đơn điệu

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về không gian Hilbert, không gian Banach, toán tử đơn điệu; phát biểu bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và trình bày hai phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân đơn điệu: phương pháp siêu gradient và phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Các kiến thức ở chương này được tham khảo từ các tài liệu [1], [2], [3], [4], [5].

1.1 Bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu

1.1.1 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. Cho X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong X là một ánh xạ $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $\langle x, x \rangle > 0$, $\forall x \neq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in X$;

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}$;

iv) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in X$.

Không gian tuyến tính X cùng tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert.

Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Chuẩn của phần tử x trong không gian Hilbert X được ký hiệu là $\|x\|$ và được xác định bằng $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Ví dụ 1.1. Các không gian $\mathbb{R}^n$, $L^2[a, b]$ là các không gian Hilbert với tích vô hướng được xác định tương ứng là:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i, \;\; x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\,; \;\; y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_a^b \varphi\,(x)\psi\,(x)\,dx, \;\; \varphi(x), \;\; \psi(x) \in L^2\,[a, b]\,.$$

Cho X là một không gian Hilbert, một dãy $\{x_n\}$ gồm các phần tử $x_n \in X$ gọi là hội tụ mạnh tới phần tử của $x \in X$ nếu $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Nếu $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $x \in X$ thì:

(i) Mỗi dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ cũng hội tụ tới x;

(ii) Mỗi dãy $\{\|x_n - \xi\|\}$ đều bị chặn, với $\xi \in X$.

Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là dãy đầy đủ hay dãy Cauchy, nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $n_0(\varepsilon)$ sao cho $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ với mọi $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0\,(\varepsilon)$.

Định nghĩa 1.2. Toán tử $A : X \to \mathbb{R}$ được gọi là phiếm hàm tuyến tính nếu:

(i) $A\,(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$, $\forall x_1$, $x_2 \in X$;

(ii) $A\,(\alpha x) = \alpha Ax$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$.

Phiếm hàm tuyến tính A được gọi là bị chặn, nếu tồn tại một hằng số $M > 0$ sao cho $\|Ax\| \leq M\,\|x\|$ với mọi $x \in X$. Giá trị hằng số M nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức đó được gọi là chuẩn của A và ký hiệu là $\|A\|$.

Mệnh đề 1.1. *Cho X là một không gian Hilbert và $x_0 \in X$ là một phần tử tùy ý. Khi đó tồn tại một hàm tuyến tính $\varphi : X \to \mathbb{R}$ sao cho $\|\varphi\| = 1$ và $\varphi\,(x_0) = \|x_0\|$.*

Dãy $\{x_n\}$ gồm các phần tử $x_n \in X$ được gọi là hội tụ yếu tới phần tử $x \in X$ (viết tắt là $x_n \rightharpoonup x$) nếu $\langle \phi, x_n\rangle \to \langle \phi, x\rangle$ với mỗi $\phi \in X^*$ khi $n \to \infty$.

Cho X là không gian Hilbert, và $T : D(T) \subset X \to X$ là một ánh xạ, ở đây $D(T)$ là ký hiệu tập xác định của ánh xạ T.

Định nghĩa 1.3. Ánh xạ $T : D(T) \subset X \to X$ được gọi là *d-compact*, nếu nó thỏa mãn tính chất với mỗi dãy $\{x_n\}$ bị chặn trong X và $\{Tx_n - x_n\}$ hội tụ mạnh thì tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ cũng hội tụ mạnh.

Định nghĩa 1.4. Ánh xạ T được gọi là *d-đóng* tại điểm p nếu $x_n \in D(T)$ sao cho dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới $x \in D(T)$ và $\{T(x_n)\}$ hội tụ mạnh đến $T(x) = p$.

1.1.2 Bất đẳng thức biến phân đơn điệu

Cho X là không gian Banach phản xạ thực. Tập hợp tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X gọi là không gian liên hợp (hay không gian đối ngẫu của X) và được ký hiệu là X^*. Cho $A : X \to X^*$ là một toán tử đơn trị với miền xác định là $D(A) \subseteq X$ (thông thường ta coi $D(A) \equiv X$ nếu không nói gì thêm) và miền giá trị (miền ảnh) $R(A)$ nằm trong X^*.

Định nghĩa 1.5. Toán tử A được gọi là

(i) *đơn điệu* nếu $\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq 0$ với mọi $x, y \in D(A)$;

(ii) *đơn điệu chặt* nếu dấu bằng của bất đẳng thức trên chỉ đạt được khi $x = y$;

(iii) *đơn điệu đều* nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$, không giảm với $t \geq 0$, $\delta(0) = 0$ và

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq \delta(\|x - y\|), \quad \forall x, y \in D(A).$$

Nếu $\delta(t) = c_A t^2$ với c_A là một hằng số dương thì toán tử A được gọi là *đơn điệu mạnh.*

Định nghĩa 1.6. Toán tử A được gọi là *hemi-liên tục* trên X nếu $A(x+ty) \rightharpoonup Ax$ khi $t \to 0^+$ với mọi x, $y \in X$, và A được gọi là *demi-liên tục* trên X nếu từ $x_n \to x$ suy ra $Ax_n \rightharpoonup Ax$ khi $n \to \infty$.

Chú ý rằng, một toán tử đơn điệu và *hemi*-liên tục trên X thì *demi*-liên tục.

Cho $A : X \to X^*$ là một toán tử đơn điệu, đơn trị và K là tập con lồi đóng của X. Bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu được phát biểu như sau: với $f \in X^*$, hãy tìm phần tử $x_0 \in K$ sao cho

$$\langle Ax_0 - f, x - x_0\rangle \geq 0, \quad \forall x \in K. \tag{1.1}$$

Bổ đề 1.1. *Cho X là một không gian Banach thực, $f \in X^*$. Nếu $A : X \to X^*$ là một toán tử đơn điệu và hemi-liên tục thì* (1.1) *tương đương với*

$$\langle Ax - f, x - x_0\rangle \geq 0, \quad \forall x \in K. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Do A là toán tử đơn điệu nên ta có

$$\langle Ax - Ax_0, x - x_0\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X,\ x_0 \in X.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$0 \le \langle Ax - Ax_0, x - x_0\rangle = \langle (Ax - f) - (Ax_0 - f), x - x_0\rangle$$

hay

$$\langle Ax - f, x - x_0\rangle \ge \langle Ax_0 - f, x - x_0\rangle.$$

Từ (1.1) và bất đẳng thức này ta suy ra (1.2).

Ngược lại giả sử

$$\langle Ax - f, x - x_0\rangle \ge 0, \quad \forall x \in K,$$

khi đó với mọi $t \in (0, 1)$ ta có

$$\langle A[(1-t)x_0 + tx] - f, (1-t)x_0 + tx - x_0\rangle \ge 0, \quad \forall x \in K,$$

suy ra

$$t\langle A[(1-t)x_0 + tx] - f, x - x_0\rangle \ge 0, \quad \forall x \in K.$$

Chia cả hai vế của bất đẳng thức này cho t sau đó cho $t \to 0$ và sử dụng tính chất *hemi*-liên tục của toán tử A ta được bất đẳng thức (1.1). □

Ví dụ 1.2. Cho $f(x)$ là một hàm thực khả vi trên $K = [a, b]$.
Hãy tìm $x_0 \in K$ sao cho

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x).$$

Ta thấy có ba khả năng sau:

1) Nếu $a < x_0 < b$ thì $f'(x_0) = 0$;

2) Nếu $x_0 = a$ thì $f'(x_0) \ge 0$ và;

3) Nếu $x_0 = b$ thì $f'(x_0) \le 0$.

Những phát biểu này có thể tổng quát bằng cách viết:

$$f'(x_0)(x - x_0) \ge 0, \quad \forall x \in K,$$

và đây là một bất đẳng thức biến phân.

Định nghĩa 1.7. Toán tử $A : X \to X^*$ được gọi là *toán tử bức* nếu

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|} = \infty, \quad \forall x \in X.$$

Sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.1) được trình bày trong định lý sau đây:

Định lí 1.1. *Giả sử $A : X \to X^*$ là một toán tử đơn điệu, hemi-liên tục và bức, K là một tập con lồi đóng của X thỏa mãn $intK \neq \emptyset$. Khi đó, bất đẳng thức biến phân* (1.1) *có ít nhất một nghiệm với mọi $f \in X^*$.*

Ngoài ra, nếu A là toán tử đơn điệu ngặt thì nghiệm x_0 của bất đẳng thức biến phân (1.1) là duy nhất. Thật vậy, giả sử x_1 là một nghiệm khác của (1.1). Khi đó,

$$\langle Ax_0 - f, x_1 - x_0 \rangle \geq 0,$$
$$\langle Ax_1 - f, x_0 - x_1 \rangle \geq 0.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức này ta được

$$\langle Ax_0 - Ax_1, x_1 - x_0 \rangle \geq 0.$$

Vì A là toán tử đơn điệu nên từ bất đẳng thức cuối cùng suy ra

$$\langle Ax_0 - Ax_1, x_0 - x_1 \rangle = 0.$$

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với $x_1 \neq x_0$ và tính chất đơn điệu ngặt của toán tử A.

Ký hiệu S là tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân đơn điệu (1.1). Phần tử $x_0 \in S$ có chuẩn nhỏ nhất được gọi là nghiệm chuẩn tắc của bài toán (1.1). Tính chất của tập nghiệm đúng S và tập nghiệm chuẩn tắc S_* của bài toán (1.1) được cho bởi bổ đề sau.

Bổ đề 1.2. *Tập nghiệm đúng S của bài toán* (1.1) *là một tập đóng. Nếu $S \neq \emptyset$ thì tập con S_* cũng là tập đóng.*

Ngoài ra nếu A là một toán tử đơn điệu, hemi-liên tục, thì S và S_* là các tập lồi.

Định nghĩa 1.8. Ánh xạ $U^s : X \to X^*$ (nói chung đa trị) xác định bởi

$$U^s(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = \|x^*\|.\|x\|;\ \|x^*\| = \|x\|^{s-1}\}, \quad s \geq 2$$

được gọi là *ánh xạ đối ngẫu* tổng quát của không gian X. Khi $s = 2$ thì U^s thường được viết là U và được gọi là *ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc* của X.

Tính đơn trị của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc được cho trong mệnh đề sau: