ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN THỊ NGỌC LIÊN

PHƯƠNG TRÌNH SÓNG CẤP HAI MỘT CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ NGỌC LIÊN

PHƯƠNG TRÌNH SÓNG CẤP HAI MỘT CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60 46 01 12

Giáo viên hướng dẫn:
TS NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN, 2014

Mục lục

Mở đầu

Phương trình sóng là một trong những phương trình cơ bản và quan trọng của lý thuyết các phương trình đạo hàm riêng và vật lý toán. Phương trình sóng rất đa dạng, sóng âm, sóng nước, sóng điện từ, sóng đàn hồi, v.v.., và thuộc dạng hyperbolic. Các bài toán đối với các phương trình thuộc dạng hyperbolic thường là rất khó, nhất là các phương trình nhiều chiều, hay phi tuyến. Do tính phức tạp nói trên, nên nhiều tính chất quan trọng và lý thú của nghiệm các phương trình sóng chủ yếu được phát hiện đối với phương trình sóng cấp hai và có số chiều thấp.

Trong thực tế có nhiều hiện tượng của cơ học và vật lý được mô tả dưới dạng phương trình sóng tuyến tính cấp hai một chiều. Do đó việc tìm hiểu sâu hơn về phương trình sóng thông qua phương trình sóng cấp hai một chiều là cần thiết. Đó chính là đề tài học tập và nghiên cứu của luận văn này.

Bố cục của luận văn gồm phần Mở đầu, bốn chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: Chuỗi Fourier và các bài toán Sturm-Liouvill
Chương này trình bày các kiến thức bổ trợ cần thiết cho các vấn đề được đề cập tới trong luận văn, đó là vấn đề về chuỗi Fourier và khai triển vào chuỗi Fourier theo các hàm riêng của các bài toán Sturm-Liouville có nhiều ứng dụng trong phương pháp tách biến giải các bài toán biên của các phương trình đạo hàm riêng.

Chương 2: Phương trình sóng thuần nhất
Chương này trình bày về phương trình sóng cấp hai một chiều thuần nhất. Vấn đề chính của chương này là trình bày công thức d' Alambert biểu diễn nghiệm của bài toán Cauchy và của các bài toán biên giá trị ban đầu của phương trình sóng cấp hai trên nửa trục. Tiếp đó, trình bày năng lượng của sóng và tính duy nhất nghiệm của phương trình sóng, trình bày phương pháp tách biến giải các bài toán biên của phương trình sóng trên khoảng hữu hạn. Vận dụng công thức d' Alambert, tìm nghiệm của một số bài toán Goursat đối với phương trình truyền sóng.

Chương 3: Phương trình sóng không thuần nhất-Nguyên lý Duhamel
Chương này trình bày nguyên lý Duhamel giải các phương trình tuyến tính không thuần nhất trên cơ sở biết công thức nghiệm của phương trình thuần nhất tương

ứng. Tiếp đó, trình bày cách giải các phương trình sóng không thuần nhất trên trục thực, trên nửa trục và trên một khoảng hữu hạn.

Chương 4: Phương pháp sai phân hữu hạn giải phương trình sóng

Nội dung của luận văn này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [1-6] dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiệm khắc của Thầy Nguyễn Văn Ngọc, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học Việt Nam. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Em cũng chân thành cảm ơn tới các thầy cô của Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giảng dạy lớp cao học Toán K6D trường Đại học khoa học Thái Nguyên, Phòng đào tạo Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ chúng em trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 06 năm 2014

Tác giả

Nguyễn Thị Ngọc Liên

Chương 1

Chuỗi Fourier và các bài toán Sturm-Liouville

Chương này trình bày cơ sở lý thuyết về chuỗi Fourier đối với các hàm lượng giác và những ứng dụng giải các bài toán biên của các phương trình đạo hàm riêng trong miền hữu hạn. Các kiến thức của chương này chủ yếu được trích ra từ tài liệu [1].

1.1 Chuỗi Fourier thông thường

1.1.1 Khái niệm về chuỗi Fourier

Với hàm $f \in L^1[-\pi, \pi]$, nghĩa là f khả tích Lesbesgue trên $[-\pi, \pi]$, ta định nghĩa chuỗi Fourier của f là chuỗi hàm lượng giác như sau

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1.1}$$

trong đó

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x'\right) \cos kx' dx', \; k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x'\right) \sin kx' dx', k = 1, 2, ... \tag{1.2}$$

Chuỗi 1.1 được gọi là chuỗi lượng giác của hàm $f(x)$ và mối quan hệ trên đây được ký hiệu là

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Lưu ý rằng ký hiệu $\sim$ không mang ý nghĩa gì về sự hội tụ của chuỗi trên, đơn giản là nó chỉ mối liên hệ (1.1)- (1.2) mà thôi.

Nếu f tuần hoàn với chu kỳ 2π, ta có định nghĩa chuỗi Fourier của f tương tự như trên. Trong đó các hệ số a_k, b_k được tính trên mỗi đoạn tùy ý $[a, a + 2\pi]$.

Nếu f tuần hoàn với chu kỳ $2l$, bằng phép đổi biến $t = \frac{\pi x}{l}$, ta đưa về trường hợp tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Để ý rằng vì $f \in L^1[-\pi, \pi]$ nên các tích phân trong (1.2) tồn tại.

1.1.2 Sự hội tụ của chuỗi Fourier

Ta nói hàm $f(x)$ thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên một khoảng hữu hạn, nếu nó có biến phân hữu hạn và có một số hữu hạn các điểm cực trị trên khoảng đó.

Định nghĩa 1.1. (Điều kiện Dirichlet).*Cho f là hàm số (thực hoặc phức) xác định trên (a, b). Các điều kiện sau đây được gọi là điều kiện Dirichlet*

(i) Tồn tại $f(a^+), f(b^-)$ và f có biến phân bị chặn trên $[a, b]$.

(ii) Có nhiều nhất là hữu hạn các điểm thuộc đoạn$[a, b]$ sao cho khi bỏ đi các lân cận bé tùy ý của những điểm này thì f có biến phân bị chặn trên các phần còn lại của đoạn $[a, b]$, hơn nữa $f \in L^1(a, b)$.

Định lý 1.1. *Cho $f \in L^1[-\pi, \pi]$.*

Nếu f thỏa mãn điều kiện Dirichlet trong $(-\pi, \pi)$ thì chuỗi Fourier của f sẽ hội tụ về $f(x)$ tại các điểm $x \in (-\pi, \pi)$ mà tại đó hàm f liên tục, hội tụ về $\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right]$ nếu x là điểm gián đoạn thông thường, hội tụ về $\frac{1}{2}\left[f\left(-\pi^+\right) + f\left(\pi^-\right)\right]$ tại $x = \pm\pi$ nếu $f\left(\pi^-\right)$ và $f\left(-\pi^+\right)$ tồn tại.

1.2 Chuỗi Fourier - Cosin và chuỗi Fourier- Sin

1.2.1 Khái niệm

Cho $f \in L^1[0, \pi]$ và thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên $(0, \pi)$. Ta định nghĩa f trên $(-\pi, 0)$ bằng công thức $f(x) = f(-x)$.

Khi đó, $f \in L^1[-\pi, \pi]$ và thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên $(-\pi, \pi)$ vì vậy có thể áp dụng kết quả phần trên. Ngoài ra, do f là hàm chẵn

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f\left(x'\right)dx',$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f\left(x'\right)\cos kx'dx',$$

$$b_k = 0, k = 1, 2, ...$$

Ta có định lý sau [1]

Định lý 1.2. *Cho $f \in L^1[0,\pi]$ và thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên $(0,\pi)$. Khi đó ta có chuỗi cosin*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\left(x'\right)dx' + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx\int_0^\pi f\left(x'\right)\cos kx'dx' \tag{1.3}$$

hội tụ về $\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]$ tại những điểm $x \in (0,\pi)$ mà $f\left(x^+\right)$ và $f\left(x^-\right)$ tồn tại, hội tụ về $f\left(0^+\right)$ tại $x=0$ nếu $f\left(0^+\right)$ tồn tại; hội tụ về $f\left(\pi^-\right)$ tại $x=\pi$ nếu $f\left(\pi^-\right)$ tồn tại.

Định lý 1.3. *Cho $f \in L^1[0,\pi]$ và thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên $(0,\pi)$. Khi đó, ta có chuỗi sin*

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx\int_0^\pi f\left(x'\right)\sin kx'dx' \tag{1.4}$$

hội tụ về $\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]$ tại những điểm $x \in (0,\pi)$ mà $f\left(x^+\right)$ và $f\left(x^-\right)$ tồn tại, hội tụ về 0 tại $x=0$ hay $x=\pi$.

1.2.2 Sự hội tụ

Định lý 1.4. *Cho $f \in L^1[0,\pi]$. Giả sử rằng f bị chặn, thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên $(-\pi,\pi)$. Giả sử f liên tục trên khoảng $(u,v) \subset (-\pi,\pi)$. Khi đó, chuỗi Fourier của f hội tụ đều về f trên một đoạn bất kỳ $[a,b] \subset (u,v)$.*

Ví dụ 1.1. *Cho $f(x) = x^2, -\pi \le x \le \pi$ ta khai triển f thành chuỗi Fourier như sau*

Ta có $b_n = 0, \forall n$, do f là hàm chẵn, và

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x'\right)dx' = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x'^2dx' = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x'\right)\cos nx'dx' = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x'^2\cos nx'dx' = (-1)^n\frac{4}{n^2}, n = 1,2,...$$

Ngoài ra, f thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên $(-\pi,\pi)$, f bị chặn, $f(-\pi) = f(\pi)$ nên do các định lý 1.1 và 1.4, ta có chuỗi Fourier của f sẽ hội tụ về f từng điểm trên $[-\pi,\pi]$, sự hội tụ này là đều. Vậy, với $x \in [-\pi,\pi]$, thì

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right).$$