ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN BIẾT

MỘT PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ NGOÀI GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHUẨNKHI BIẾT MỘT ĐIỂM CHẤP NHẬN ĐƯỢC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN BIẾT

MỘT PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ NGOÀI GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHUẨN KHI BIẾT MỘT ĐIỂM CHẤP NHẬN ĐƯỢC

Chuyên ngành:**TOÁN ỨNG DỤNG**

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:TS.NGUYỄN ANH TUẤN

Thái Nguyên – 2014

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Trong những thập kỷ qua, cùng với sự phát triển mạnh mẽ của công nghệ thông tin, lý thuyết tối ưu đã có những bước tiến lớn trong đó phải nói đến các phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính gắn liền với tên tuổi của nhiều nhà toán học như L.V. Kantorovich (1939), George Dantzig (1947), Lemke (1954), Leonid Khachian (1979), Karmarkar (1984), ...

Bài toán quy hoạch tuyến tính có hai dạng cơ bản là dạng chuẩn và dạng chính tắc, hai dạng này có quan hệ mật thiết với nhau. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn là bài toán có miền ràng buộc là một hệ bất phương trình tuyến tính, còn bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là bài toán quy hoạch có miền ràng buộc là một hệ phương trình tuyến tính với các biến của nó có dấu không âm.

Nội dung chính của luận văn là đề nghị một thuật toán cải tiến từ thuật toán nón xoay tuyến tính trình bày trong [5] khi chúng ta biết một điểm chấp nhận được của miền ràng buộc bài toán (đây là giả thiết thông thường mà các thuật toán khác vẫn sử dụng). Sự cải tiến này đã làm cho thuật toán mới đề xuất chỉ làm việc với các siêu phẳng tương ứng là ràng buộc biên và như vậy chúng ta đã loại đi được tất cả các ràng buộc không phải là biên của miền ràng buộc mà thuật toán nón xoay tuyến tính đề nghị trong [5] vẫn có thể phải làm việc tính toán trong các bước lặp của nó khi thuật toán chưa cải tiến. Đây chính là ưu điểm của thuật toán làm cho số bước lặp giảm đi đáng kể khi kích thước (số chiều) của bài toán là lớn.

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1 trình bày bài toán tối ưu tổng quát, bài toán quy hoạch tuyến tính và phương pháp đơin hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc.

Chương 2 trình bày những khái niệm cơ bản liên quan đến nón đơn hình tuyến tính, từ đó làm cơ sở cho việc xây dựng phương pháp nón xoay tuyến tính giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính khi biết một nón-min của hàm mục tiêu bài toán.

Chương 3 (dựa trên phương pháp nón xoay đề nghị trong chương 2) trình bày việc xây dựng thuật toán nón xoay cải tiến CT giải bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính khi biết một điểm chấp nhận được của miền ràng buộc bài toán và ví dụ bằng số minh hoạ cho thuật toán.

Thuật toán nón xoay cải tiến CT giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khi biết một điểm chấp nhận được của miền ràng buộc bài toán đề nghị trong luận văn này được xây dựng chi tiết, các bước của thuật toán được trình bày sao cho chúng ta có thể dễ dàng lập trình chuyển sang các chương trình trên máy tính bằng các ngôn ngữ như Pascal, C, Java, ...

Luận văn này hoàn thành dựa trên cuốn sách"Quy hoạch tuyến tính với phương pháp nón xoay"[5] và trên các sách, tài liệu có trong phần tài liệu tham khảo.

Tác giả

Nguyễn Văn Biết

CHƯƠNG 1
BÀI TOÁN TỐI ƯU TỔNG QUÁT VÀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chương này, chúng tôi trình bày bài toán tối ưu tổng quát, bài toán quy hoạch tuyến tính và tóm tắt sơ lược phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc.

1.1. Bài toán tối ưu tổng quát:

Bài toán tối ưu tổng quát được phát biểu như sau: Cực đại hoá (cực tiểu hoá) hàm:

$$f(x) \to max(min). \tag{1.1}$$

với các điều kiện

$$g_i(x)(\leq,=,\geq)b_i, i = 1,...,m. \tag{1.2}$$

$$x \in X \subset R^n. \tag{1.3}$$

Bài toán (1.1) – (1.3) được gọi là một quy hoạch, hàm $f(x)$ được gọi là hàm mục tiêu, các hàm $g_i(x), i = 1,...,m$ được gọi là các hàm ràng buộc, mỗi đẳng thức trong hệ (1.2) được gọi là một ràng buộc.

Tập hợp: $D = \{x \in X \,/\, g_i(x)(\leq,=,\geq)b_i, i = 1,...m\}$. (1.4)

được gọi là miền ràng buộc (hay miền chấp nhận được). Mỗi điểm: $(x = x_1, x_2,..., x_n) \in D$ được gọi là một phương án (hay một lời giải chấp nhận được). Một phương án $x^* \in D$ đạt cực đại (hay cực tiểu) của hàm mục tiêu, cụ thể là:

$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$ (đối với bài toán Max)

$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D$ (đối với bài toán Min) được gọi là phương án tối ưu (lời giải tối ưu). Khi đó giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị tối ưu của bài toán.

1.2. Bài toán QHTT và phương pháp đơn hình

1.2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Bài toán quy hoạch tuyến tính có hai dạng cơ bản là dạng chính tắc và dạng chuẩn tắc, sau đây ta trình bày lần lượt hai dạng này.

Bài toán QHTT dạng chính tắc:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,...,m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,...,n$$

Bài toán QHTT dạng chuẩn:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1,...,m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,...,n$$

Bất kỳ QHTT nào cũng có thể đưa về một trong hai dạng chuẩn hoặc chính tắc nhờ phép biến đổi tuyến tính sau:

1. Một ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ có thể đưa về ràng buộc: $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i$ bằng cách nhân hai vế với (-1) và viết lại: $\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \geq b'_i$

2. Một ràng buộc đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ có thể thay bằng hai ràng buộc bất đẳng thức: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ và $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -b_i$

3. Một biến x_i không bị ràng buộc dấu có thể thay bởi hiệu của hai biến không âm bằng cách đặt: $x_j = x_j^+ - x_j^-$ với $x_j^+ \ge 0, x_j^- \ge 0$.

4. Một ràng buộc bất đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ có thể đưa về ràng buộc đẳng thức bằng cách đưa vào biến phụ $y_i \ge 0$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_j = b_i$

Về nguyên tắc, áp dụng nhiều lần các phép biến đổi 1, 2 và 3 ta có thể đưa một bài toán QHTT bất kỳ về dạng chuẩn, sau đó áp dụng nhiều lần phép biến đổi 4 ta sẽ đưa nó về dạng chính tắc.

1.2.2. Phương pháp đơn hình

Vào năm 1947, Nhà Toán học người Mỹ là George Dantzig đề xuất giải bài toán QHTT dạng chính tắc sau:

$$< c,x > \quad \to \quad max \tag{1.5}$$

$$Ax = b \tag{1.6}$$

$$x \ge 0 \tag{1.7}$$

Trong đó *A* là ma trận kích thước *m.n* *(m* $\le$ *n)* với hạng của ma trận *A* là *m.*

Dưới đây để ngắn gọn, chúng tôi trình bày sơ lược tóm tắt thuật toán, còn phần cơ sở của thuật toán đơn hình có thể xem trong [3].

Thuật toán đơn hình

Bước 1: Xây dựng bảng đơn hình xuất phát. Tìm một phương án cực biên xuất phát x và cơ sở của nó $A_j, j \in J$.

■ Xác định các số z_{jk} bởi hệ phương trình: $\sum_{j\in J} z_{jk}A_j = A_k$ (1.8)

■ Đối với mỗi $k \notin J$, tính các ước lượng: $\Delta_k = \sum_{j\in J} z_{jk}c_j - c_k$ (1.9)

Còn với $j \neq 0$ thì $\Delta_j = 0$.

■ Tính giá trị hàm mục tiêu: $z_0 = \sum_{j\in J} c_j x_j$

Bước 2: Kiểm tra tối ưu:

Nếu $\Delta_k \geq 0, k \notin J$ thì x là phương án tối ưu, dừng thuật toán. Trái lại, chuyển sang bước 3.

Bước 3: Tìm véc tơ đưa vào cơ sở. Có hai khả năng xảy ra:

■ Tồn tại $k \notin J$ sao cho $\Delta_k < 0$ và $z_{jk} \leq 0, \forall j \in J$ thì bài toán QHTT không có lời giải tối ưu (Z không bị chặn trên). Dừng thuật toán.

■ Đối với mỗi $k \notin J$ sao cho $\Delta_k < 0$ đều tồn tại $j \in J : z_{jk} > 0$. Khi đó chọn chỉ số s theo tiêu chuẩn: $\Delta_s = min\{\Delta_k / \Delta_k < 0\}$ (1.10)

Đưa véc tơ A_s vào cơ sở.

Bước 4: Tìm véc tơ loại khỏi cơ sở. Xác định:

$$\theta_r = min\left\{\frac{x_j}{z_{js}} \mid z_{js} > 0\right\} = \frac{x_r}{z_{rs}} \tag{1.11}$$

Khi đó chỉ số loại ra là *r*, và đưa véc tơ A_r ra khỏi cơ sở.

Bước 5: Chuyển sang phương án cực biên mới và cơ sở mới. Cơ sở mới là $\{A_j, j \in J'\}$ với $J' = (J \setminus \{r\}) \cup \{s\}$. $\forall j \in J'$ các thành phần của phương án cực biên mới x' được tính theo công thức:

$$x'_j = \begin{cases} x_j - (x_r / z_{rs}).z_{js},\ nếu\ \ j \neq s \\ (x_r / z_{rs}),\ nếu\ \ j = s \end{cases} \tag{1.12}$$

Khai triển của các véc tơ A_k theo các véc tơ cơ sở mới được tính theo công thức (1.15). Quay lên bước 2.

Công thức đổi cơ sở và bảng đơn hình:

Ta xét các công thức chuyển từ phương án cực biên x với cơ sở J sang phương án cực biên x' với cơ sở J'.

Ta đã có công thức (1.12) để tính các thành phần của x', bây giờ ta thiết lập công thức tính các số z'_{jk} ta có từ: $A_s = \sum_{j\in J} z_{js}A_j$. Suy ra:

$$A_r = \frac{1}{z_{rs}}(A_s - \sum_{j\in J, j\neq r} z_{js}.A_j) \tag{1.13}$$

Mặt khác: $A_k = \sum_{j\in J} z_{jk}A_j = \sum_{j\in J, j\neq r} z_{jk}A_j + z_{rk}A_r$ (1.14)

Thay biểu thức của A_r từ (1.13) vào (1.14) ta được:

$$A_k = \sum_{j\in J, j\neq r} z_{jk}A_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\left(A_s - \sum_{j\in J, j\neq r} z_{js}A_j\right) = \sum_{j\in J, j\neq r} (z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js})A_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}}A_s$$

Đây là công thức biểu diễn A_k qua cơ sở mới $J' = (J \setminus \{r\}) \cup \{s\}$

Bởi vậy ta có, $\forall j \in J':\quad z'_{jk} = \begin{cases} z_{jk} - (z_{rk} / z_{rs})z_{js},\ nếu\ \ j \neq s \\ (z_{rk} / z_{rs}),\ nếu\ \ j = s \end{cases}$ (1.15)

Sau khi có z'_{jk} ta tính:

$$\Delta'_k = \sum_{j\in J'} z'_{jk}c_j - c_k \tag{1.16}$$

Để dễ tính toán, mỗi bước lặp ta thiết lập bảng đơn hình.