ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

TRẦN DUY THÀNH

CÁC ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG CÁC KHÔNG GIAN VÉC TƠ TÔPÔ LỒI ĐỊA PHƯƠNG VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

TRẦN DUY THÀNH

CÁC ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG CÁC KHÔNG GIAN VÉC TƠ TÔPÔ LỒI ĐỊA PHƯƠNG VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số : 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS.HOÀNG VĂN HÙNG

Thái Nguyên - Năm 2014

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Nhiều vấn đề của toán học trong các lĩnh vực lý thuyết tối ưu, lý thuyết trò chơi, phương trình tích phân, phương trình đạo hàm riêng, ...cần sử dụng các định lý về điểm bất động trong các không gian véc tơ tô pô lồi địa phương như định lý điểm bất động Schauder – Tychonoff, Markov – Kakutani, Kakutani – Ky Fan...Điều này cho thấy khi nghiên cứu các vấn đề của toán học nói chung và toán học ứng dụng nói riêng không thể bỏ qua các định lý điểm bất động trong lớp không gian quan trọng này. Đây là cơ sở khoa học để tác giả lựa chọn đề tài cho bản luận văn **"Các định lý điểm bất động trong các không gian véc tơ tô pô lồi địa phương và ứng dụng"**.

Dưới tiêu đề trên tác giả đã trình bày lại những kết quả cơ bản của lý thuyết các điểm bất động trong không gian véc tơ tô pô lồi địa phương và một số áp dụng của lý thuyết này vào các phần khác nhau của toán học. Bản luận văn gồm Lời nói đầu, hai chương, Kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG I. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN VÉC TƠ TÔ PÔ LỒI ĐỊA PHƯƠNG.

Chương này tóm tắt một số các định nghĩa và sự kiện cơ bản liên quan đến không gian tô pô, không gian véc tơ tô pô lồi địa phương, chứng minh một số định lý điểm bất động trong không gian véc tơ tô pô lồi địa phương : định lý Schauder – Tychonoff, định lý Markov – Kakutani, định lý Kakutani – Ky Fan. Định lý điểm bất động Kakutani – Ky Fan được chứng minh bởi Kakutani cho trường hợp hữu hạn chiều (1941) và được chứng minh bởi Ky Fan cho trường hợp vô hạn chiều (1952) dựa trên một bất đẳng thức được chứng minh bởi chính Ky Fan liên quan đến các song hàm nửa liên tục dưới theo một biến, nửa liên tục trên và lõm theo một biến khác. Những định lý này là cơ sở cho các áp dụng của lý thuyết điểm bất động ở chương II.

CHƯƠNG II. MỘT SỐ ÁP DỤNG CỦA CÁC ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN VÉC TƠ TÔ PÔ LỒI ĐỊA PHƯƠNG.

Chương này xét các áp dụng của các định lý điểm bất động ở chương I. Định lý điểm bất động Schauder – Tychonoff được áp dụng để chứng minh định lý Schaefer về sự tồn tại điểm bất động của một lớp các toán tử compact, định lý điểm bất động Krasnoselskii, một số hệ quả của các định lý này và định lý Lomonosov về sự tồn tại các không gian con bất biến không tầm thường của một lớp các toán tử tuyến tính trên không gian Banach X. Định lý Krasnoselskii có nhiều ứng dụng trong lý thuyết phương trình tích phân và phương trình đạo hàm riêng. Trong luận văn có nêu một cải tiến của định lý Krasnoselskii, được chứng minh bởi T.A. Burton vào năm 1998, kèm theo một ví dụ áp dụng vào lý thuyết phương trình tích phân. Định lý Markov – Kakutani được áp dụng để chứng minh sự tồn tại các trung bình bất biến trên một nửa nhóm abel. Cuối cùng, bất đẳng thức Ky Fan (định lý 1.5.4) được áp dụng để chứng minh sự tồn tại điểm cân bằng Nash trong các trò chơi bất hợp tác của lý thuyết trò chơi.

Các ký hiệu được dùng trong bản luận văn là các ký hiệu thông dụng trong các tài liệu toán học hiện đại. Tuy nhiên, ở một vài chỗ tác giả vẫn giới thiệu các ký hiệu để tránh hiểu nhầm.

Tài liệu tham khảo gồm 06 danh mục, trong đó tài liệu [V.Pata] là tài liệu tham khảo chính.

Tác giả đã nhận được sự giúp đỡ tận tình của thày hướng dẫn, T.S Hoàng Văn Hùng – Viện Khoa học Cơ bản, Đại học Hàng Hải Việt Nam, trong việc tìm hiểu các vấn đề của bản luận văn và trình bày lại theo một trình tự logic. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới tập thể các thày, cô của Khoa Toán- Tin, Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên; các thày, cô của Viện Toán học- Viện Khoa học Việt Nam và thày hướng dẫn; những người đã tận tình giảng dạy, giúp đỡ tác giả trong suốt khóa học cao học tại Đại học Thái Nguyên và hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 5 năm 2014

Người viết

Trần Duy Thành

Chương 1

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN VÉC TƠ TÔ PÔ LỒI ĐỊA PHƯƠNG

Chương này tóm tắt một số các định nghĩa và sự kiện cơ bản liên quan đến không gian tô pô, không gian véc tơ tô pô lồi địa phương, chứng minh một số định lý điểm bất động trong không gian véc tơ tô pô lồi địa phương. Những định lý này là cơ sở cho các áp dụng của lý thuyết điểm bất động ở chương sau.

1.1 Không gian tô pô và không gian véc tơ tô pô lồi địa phương

1.1.1 Không gian tô pô

* Cho X là một tập khác rỗng. Một tô pô trên X là một lớp τ các tập con của X có các tính chất sau:

1) X thuộc τ và $\emptyset$ (tập rỗng) thuộc τ .

2) Hợp của một họ tuỳ ý các tập thuộc τ là thuộc τ và giao của một họ hữu hạn các tập thuộc τ là thuộc τ .

Một tập X cùng với một tô pô τ trên X (tức là một cặp (X, τ)) gọi là một không gian tô pô. Mỗi tập thuộc τ gọi là một tập mở (khi cần chính xác ta sẽ gọi một tập thuộc τ là τ -mở).

Nếu (X, τ) là một không gian tô pô và Y là một tập con của X thì họ τ_Y gồm tất cả các tập dạng $G \cap Y$, trong đó G là một tập mở tuỳ ý thuộc họ τ, là một tô pô trên Y. Không gian tô pô (Y, τ_Y) gọi là không gian con của không gian tô pô (X, τ).

Nếu τ và σ là hai tô pô trên cùng một tập nền X và $\sigma \subset \tau$ thì ta nói τ mịn hơn σ hay σ thô hơn τ.

Ta sẽ chỉ xét các không gian tô pô tách, tức là các không gian thỏa mãn tiên đề Hausdorff dưới đây:

* Với hai điểm phân biệt bất kỳ x, y của X tồn tại một lân cận U_x của x và một lân cận U_y của y sao cho $U_x \cap U_y = \emptyset$.

1.1.2 Định nghĩa *Giả sử (X, τ) là một không gian tô pô và F là một tập con của X. Tập F gọi là đóng trong X nếu $X \backslash F$ là tập mở. Vậy tập đóng là các tập con của X mà phần bù của nó là mở.*

Các tập đóng có tính chất :

1') X và $\emptyset$ là đóng.

2') Giao của một họ tuỳ ý các tập đóng là đóng. Hợp hữu hạn của các tập đóng là đóng.

1.1.3 Định nghĩa *Giả sử (X, τ) là một không gian tô pô và x là một phần tử của X (ta sẽ gọi các phần tử của X là các điểm của nó). Một tập mở của X chứa x gọi là một lân cận của x . Một điểm z của X gọi là một điểm dính của tập con $A \subset X$ nếu mọi lân cận của z chứa ít nhất một điểm của A. Điểm y của X gọi là một điểm giới hạn của A nếu trong mọi lân cận của y tìm được ít nhất một điểm x của A sao cho x khác y. Tập tất cả các điểm dính của tập con A của X gọi là bao đóng của A, ký hiệu $\overline{\mathrm{A}}$.*

Ta có :

i) A đóng $\Leftrightarrow \overline{\mathrm{A}} = A$.

ii) $\overline{A}$ là tập đóng bé nhất của X chứa A.

iii) B mở $\leftrightarrow$ B là lân cận của mọi $x \in B \leftrightarrow \forall x \in B, \exists$ tập mở $V_x \subset B$ sao cho $x \in V_x$.

1.1.4 Định nghĩa *Cho (X, τ) là một không gian tô pô. Tập con $\mathcal{B}$ của τ được gọi là một cơ sở của tô pô τ nếu mọi tập mở trong tô pô τ biểu diễn được dưới dạng hợp (hữu hạn hoặc vô hạn) của các tập thuộc $\mathcal{B}$.*

Ví dụ : Tập các hình cầu mở (với tâm tại một điểm tuỳ ý và bán kính tuỳ ý) trong một không gian metric X là một cơ sở của tô pô gồm tất cả các tập mở trong X.

Một cơ sở $\mathcal{B}$ của tô pô τ trên tập X có các tính chất sau

1) $\forall x \in X, \exists G \in \mathcal{B} : x \in G$

2) Nếu x được chứa trong giao của hai tập G_1, G_2 thuộc $\mathcal{B}$ thì tồn tại tập G thuộc $\mathcal{B}$ sao cho $x \in G \subset G_1 \cap G_2$.

Ngược lại mọi họ $\mathcal{B}$ các tập con của một tập X có hai tính chất nêu trên đều là một cơ sở của tô pô τ gồm tất cả các tập con của X biểu diễn được dưới dạng hợp của một họ con nào đó của $\mathcal{B}$. Tô pô này gọi là tô pô sinh bởi $\mathcal{B}$. Nếu $\mathcal{A}$ là họ các tập con của X có tính chất "hợp của các tập thuộc $\mathcal{A}$ bằng X" (nói cách khác : $\mathcal{A}$ là một phủ của X) thì tập $\mathcal{B}$ các tập con của X nhận được từ các tập của $\mathcal{A}$ bởi một số hữu hạn các phép giao thoả mãn cả hai tính chất 1), 2) . Do đó $\mathcal{A}$ được gọi là một tiền cơ sở của tô pô sinh bởi $\mathcal{B}$.

1.1.5 Định nghĩa *Cho X, Y là hai không gian tô pô. Ánh xạ f của không gian tô pô X vào không gian tô pô Y được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu với mọi lân cận U_{y_0} của điểm $y_0 = f(x_0)$ tìm được lân cận V_{x_0} của điểm x_0 sao cho $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$.*

Ánh xạ f từ X vào Y được gọi là liên tục nếu f liên tục tại mọi $x \in X$

1.1.6 Mệnh đề*i) Ánh xạ f từ không gian tô pô X vào không gian tô pô Y liên tục khi và chỉ khi nghịch ảnh bởi f của mọi tập mở trong Y*

là một tập mở trong X.

ii) Ánh xạ f từ không gian tô pô X vào không gian tô pô Y liên tục khi và chỉ khi nghịch ảnh bởi f của mọi tập đóng trong Y là một tập đóng trong X.

iii) Giả sử X, Y, Z là các không gian tô pô và $f : X \to Y, \varphi : Y \to Z$ là các ánh xạ liên tục. Khi đó ánh xạ hợp $\varphi \circ f$ từ X vào Z cũng liên tục.

1.1.7 Định nghĩa *Giả sử f là một song ánh từ không gian tô pô X lên không gian tô pô Y. Nếu các ánh xạ f và f^{-1} đều liên tục thì f được gọi là một phép đồng phôi từ X lên Y.*

Hai không gian tô pô X và Y gọi là đồng phôi nếu tồn tại một phép đồng phôi từ X lên Y.

1.1.8 Định nghĩa *Không gian tô pô X được gọi là compact nếu từ mọi phủ mở của X đều có thể trích ra một phủ con hữu hạn.*

Tập con Y của X gọi là một tập compact trong X nếu Y xem như không gian con của không gian tô pô X là một không gian compact.

1.1.9 Định nghĩa *Họ (A_i) các tập con của một tập T gọi là có tính tương giao hữu hạn nếu giao của một họ con hữu hạn tuỳ ý của họ (A_i) là khác rỗng.*

1.1.10 Định lý *i) Điều kiện cần và đủ để không gian tô pô X compact là mọi họ các tập con đóng có tính chất tương giao hữu hạn của X đều có giao khác rỗng.*

ii) Mọi không gian con đóng của một không gian tô pô compact là compact.

iii) Nếu Y là tập con compact của không gian tô pô Hausdorff X thì Y đóng trong X. Với mọi $x \notin Y$ tồn tại một tập mở U chứa x, một tập mở V chứa Y sao cho $U \cap V = \emptyset$.

iv) Nếu X là không gian tô pô compact và f là một song ánh liên tục