ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HÒA

NGUYÊN LÍ ÁNH XẠ KKM VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN VECTƠ TÔPÔ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN-2008

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HÒA

NGUYÊN LÍ ÁNH XẠ KKM VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN VECTƠ TÔPÔ

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Lê Văn Chóng

THÁI NGUYÊN-2008

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Để đưa ra một chứng minh đơn giản hơn chứng minh ban đầu rất phức tạp của Định lí điểm bất động Brouwer (1912), ba nhà toán học Balan là Knaster, Kuratowski và Mazurkiewicz đã chứng minh một kết quả quan trọng về giao khác rỗng của hữu hạn các tập đóng trong không gian hữu hạn chiều (1929), kết quả này sau gọi là Bổ đề KKM. Năm 1961, Ky Fan mở rộng bổ đề này ra không gian vô hạn chiều, kết quả này sau gọi là Nguyên lí ánh xạ KKM. Năm 1972, dùng Nguyên lí ánh xạ KKM Ky Fan chứng minh một bất đẳng thức quan trọng, sau gọi là Bất đẳng thức Ky Fan.

Sau khi được công bố, Bất đẳng thức Ky Fan nhanh chóng thu hút sự quan tâm của nhiều nghiên cứu trong lĩnh vực giải tích hàm phi tuyến. Phương pháp tiếp cận xây dựng bất đẳng thức này từ Nguyên lí ánh xạ KKM là ý tưởng khởi nguồn của nhiều nghiên cứu tiếp theo về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng trong các không gian khác nhau (như không gian vectơ tôpô, không gian G-lồi, không gian siêu lồi…). Trong không gian vectơ tôpô , cách tiếp cận trên được nghiên cứu mở rộng ra bài toán cân bằng vô hướng với các kết quả cơ bản như Brezis- Nirenberg-Stampacchia [4](1972), Mosco [13](1976), Blum- Oettli [3](1993)…và mở rộng ra bài toán cân bằng vectơ (đơn trị, đa trị) với các kết quả quan trọng như Bianchi- Hadjisavvas- Schaible [2](1997), Oettli [3](1997), Tấn-Tĩnh [16](1998), Fu [10](2000), Ansari- Konnov- Yao [1](2001), Tấn- Minh [17](2006)…

Bài toán cân bằng vectơ đơn trị được xét trong luận văn là bài toán sau:

$$\text{Tìm } \bar{x} \in K \text{ sao cho } f(\bar{x}, y) \not< 0 \text{ với mọi } y \in K,$$

trong đó K là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian vectơ tôpô X, $f: K \times K \to Y$, Y là một không gian vectơ tôpô với nón thứ tự $C \subset Y$ nhọn, lồi, đóng, $\operatorname{int} C \neq \varnothing$.

Bài toán cân bằng vectơ đa trị được xét là các bài toán sau:

$$\text{Tìm } \bar{x} \in K \text{ sao cho } F(\bar{x}, y) \not\subset -\operatorname{int} C \text{ với mọi } y \in C,$$

$$\text{Tìm } \bar{x} \in K \text{ sao cho } F(\bar{x}, y) \subset C \text{ với mọi } y \in C,$$

trong đó hàm đa trị $F : K \times K \to 2^Y$ (các tập K, C và không gian Y như trên).

Mục đích của luận văn là trình bày một số kết quả nghiên cứu cơ bản về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng vectơ trong không gian vectơ tôpô với cách tiếp cận dùng Nguyên lí ánh xạ KKM.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm 3 chương. Chương 1 trình bày một số điểm cơ bản về xuất xứ của Nguyên lí ánh xạ KKM trong sự liên quan với một số thành tựu quan trọng của giải tích hàm phi tuyến (Định lí điểm bất động Brouwer, Bổ đề KKM, Bất đẳng thức Ky Fan). Chương 2 trình bày một số kết quả cơ bản về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng vectơ đơn trị ở hai hướng nghiên cứu: sử dụng và không sử dụng giả thiết đơn điệu. Trước khi trình bày các kết quả này, chúng tôi đưa ra một số kết quả đặc thù ở bài toán cân bằng vô hướng để dễ thấy phần chính là kết quả và phương pháp ở bài toán cân bằng vectơ được mở rộng thế nào từ bài toán vô hướng. Một số kiến thức chuẩn bị về nón và quan hệ thứ tự theo nón cần cho nghiên cứu bài toán vectơ cũng được đưa vào chương này. Chương 3 đề cập đến một số kết quả nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng vectơ đa trị có giả thiết đơn điệu và không có giả thiết đơn điệu.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sĩ Lê Văn Chóng- Viện toán học Việt Nam, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ và nghiêm khắc trong khoa học. Xin trân trọng cảm ơn các thầy, cô giáo thuộc Viện toán học và các thầy, cô giáo của trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã trực tiếp giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu . Xin được cảm ơn cơ quan, gia đình và bạn bè đã động viên rất nhiều giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2008

Nguyễn Thị Hòa

Chương 1

NGUYÊN LÍ ÁNH XẠ KKM

Như ta biết, Bổ đề KKM (1929) trong không gian hữu hạn chiều của ba nhà toán học Balan thiết lập được một chứng minh đơn giản hơn chứng minh ban đầu rất phức tạp của Định lí điểm bất động Brouwer (1912) và sau đó bổ đề này được mở rộng ra không gian vô hạn chiều thành Nguyên lí ánh xạ KKM (1961). Bất đẳng thức Ky Fan (1972) được chứng minh bằng cách sử dụng nguyên lí này.

Ở chương này chúng tôi đề cập tới một số điểm cơ bản của Nguyên lí ánh xạ KKM trong liên quan với các thành tựu trên của giải tích hàm phi tuyến (Định lí Brouwer, Bổ đề KKM, Bất đẳng thức Ky Fan).

1.1. BỔ ĐỀ KKM

Trước hết ta nhắc đến một số khái niệm sau:

Cho X *là một không gian vectơ, tập hợp* S *trong* X *được gọi là một n-đơn hình nếu* $S = co\{u_0, u_1, ..., u_n\}$ *với* $u_0, u_1, ..., u_n \in X$ *và các vectơ* $u_1 - u_0, ..., u_n - u_0$ *là độc lập tuyến tính (ở đây* $co(A)$ *kí hiệu bao lồi của tập* A*). Các điểm* u_i *được gọi là các đỉnh. Bao lồi của* $(k+1)$ *đỉnh được gọi là* k*-diện của* S*. Mỗi* $x \in S$ *được biểu diễn duy nhất dưới dạng:*

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i u_i, \text{ với } x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1.$$

Ta viết $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$ *và gọi các* $x_i, (i = 0, 1, ..., n)$ *là các tọa độ trọng tâm của* x*, chúng cũng biến đổi liên tục theo* x*.*

Dùng Bổ đề Sperner về phép gán số trong phép tam giác phân một đơn hình do Sperner đưa ra từ 1928, Knaster, Kuratowski và Mazurkiewicz đã chứng minh bổ đề quan trọng sau trong không gian R^n.

Bổ đề KKM (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz[11], 1929)

Cho một n-đơn hình $S = co\{u_0, u_1, ..., u_n\}$ *trong* R^n *và các tập hợp đóng* $F_0, F_1, ..., F_n$ *trong* S *thỏa mãn điều kiện: với mọi tập hợp con* $I \subset \{0, 1, ..., n\}$ *ta có*

$$co\{u_i : i \in I\} \subset \bigcup_{i \in I} F_i . \qquad \text{(KKM)}$$

Khi đó $\bigcap_{i=0}^{n} F_i \neq \emptyset$.

Chứng minh đầy đủ của Bổ đề KKM bằng cách dùng Bổ đề Sperner được giới thiệu trong Tân-Hà [18], do khuôn khổ của luận văn chúng tôi không nêu ra ở đây.

Định lí điểm bất động Brouwer (Brouwer [5], 1912)

Mọi ánh xạ liên tục từ hình cầu đơn vị đóng trong R^n *vào chính nó đều có điểm bất động.*

Để chứng minh định lí này bằng cách dùng Bổ đề KKM ta sử dụng kết quả sau.

Mệnh đề 1.1

Giả sử M *là một tập hợp trong không gian tôpô có tính chất: mọi ánh xạ liên tục* $T: M \to M$ *đều có điểm bất động. Khi ấy nếu* M' *đồng phôi với* M *thì* M' *cũng có tính chất đó.*

Chứng minh

Cho φ là phép đồng phôi từ M lên M' và $T': M' \to M'$ là ánh xạ liên tục. Ta cần chứng minh T' cũng có điểm bất động.

Thật vậy, đặt $T = \varphi^{-1} T' \varphi$ ta được $T: M \to M$ là ánh xạ liên tục, nên theo giả thiết tồn tại $x_0 \in M$ với $Tx_0 = x_0$. Khi đó $\varphi(x_0)$ là điểm bất động của T'. ■

Chứng minh Định lí điểm bất động Brouwer

Cho đơn hình S, vì hình cầu đơn vị đóng trong R^n đồng phôi với một n- đơn hình S nên ta chỉ cần chứng minh ánh xạ liên tục $T: S \to S$ có điểm bất động trong S.

Với mỗi $x \in S$ ta có $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$, các x_i với $i = 0, 1, ..., n$ là các tọa độ trọng tâm của x và $y = Tx = (y_0, y_1, ..., y_n)$. Ta đặt

$$F_i = \{x \in S : x_i \geq y_i\}, i = 1, ..., n \ .$$

Do T liên tục nên các F_i đều đóng. Ta sẽ chứng minh các F_i thỏa mãn điều kiện (KKM) sau

$$co\{u_i : i \in I\} \subset \bigcup_{i \in I} F_i,$$

trong đó I là một tập con bất kỳ của tập $\{0, 1, ..., n\}$.

Lấy $x \in co\{u_i : i \in I\}$ ta có $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$ với $x_i = 0$ nếu $i \notin I$, $x_i > 0$ nếu $i \in I$ và $y = (y_0, y_1, ..., y_n)$ với $y_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} y_i = 1$. Để chỉ ra $x \in \bigcup_{i \in I} F_i$ ta cần chỉ ra tồn tại $i_0 \in I$ để $x \in F_{i_0}$, tức là $x_{i_0} \geq y_{i_0}$. Giả sử ngược lại rằng $x_i < y_i$ với mọi $i \in I$. Khi đó ta gặp mâu thuẫn:

$$1 = \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i \in I} x_i < \sum_{i \in I} y_i \leq \sum_{i=0}^{n} y_i = 1.$$

Vậy điều kiện KKM được thỏa mãn. Do đó theo bổ đề KKM tồn tại $\overline{x} \in \bigcap_{i=0}^{n} F_i$. Khi đó ta có $\overline{x}_i \geq \overline{y}_i$ với $i = 0,1,...,n$, trong đó $\overline{y}_i$ là tọa độ trọng tâm của $\overline{y} = T\overline{x}$. Vì $\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i = \sum_{i=0}^{n} \overline{y}_i = 1$ nên các bất đẳng thức trên phải là đẳng thức. Vậy ta có $\overline{x}_i = \overline{y}_i$, $\forall i = 0,...,n$ hay $\overline{x} = \overline{y} = T\overline{x}$ và định lí được chứng minh. ■

Định lí điểm bất động Brouwer vẫn đúng nếu ta thay hình cầu đơn vị đóng trong R^n bởi một tập lồi đóng bị chặn trong không gian tuyến tính hữu hạn chiều (điều kiện hữu hạn chiều là bắt buộc). Dùng định lí này ta cũng nhận được Bổ đề KKM như chứng minh dưới đây.

Chứng minh Bổ đề KKM

Giả sử $S = \{u_0, u_1, ..., u_n\}$ là một đơn hình và $F_0, F_1, ..., F_n$ là các tập đóng trong S thỏa mãn điều kiện (KKM) nhưng $\bigcap_{i=0}^{n} F_i = \varnothing$. Khi đó với mỗi $x \in S$ và mỗi $i = 0,...,n$ ta đặt $\alpha_i(x) = d(x, F_i)$ là khoảng cách từ x đến F_i. Vì $\bigcap_{i=0}^{n} F_i = \varnothing$ nên với mỗi $x \in S$ tồn tại i sao cho $x \notin F_i$, tức là $\alpha_i(x) > 0$ do F_i đóng . Vậy ta có thể định nghĩa hàm

$$\mu_i(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x)}, \; x \in S, \; i = 0,1,...,n.$$

Các hàm μ_i có tính chất: liên tục, $0 \leq \mu_i(x) \leq 1$, $\sum_{i=0}^{n} \mu_i(x) = 1$ với mọi $x \in S$. Với mỗi $x \in S$ ta đặt $Tx = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(x) u_i$. Do S lồi nên ta có $Tx \in S$, ngoài ra T liên tục vì μ_i liên tục. Theo Định lí điểm bất động Brouwer, tồn tại $\overline{x} \in S$ mà $\overline{x} = T\overline{x}$.

Đặt $I = \{i : \mu_i(\overline{x}) > 0\}$. Khi đó ta có

$$T\overline{x} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(\overline{x}) u_i = \sum_{i \in I} \mu_i(\overline{x}) u_i .$$

Nhưng vì $\mu_i(\overline{x}) > 0$ khi và chỉ khi $\overline{x} \notin F_i$ với mọi $i \in I$, nên $\overline{x} \notin \bigcup_{i \in I} F_i$.

Điều này mâu thuẫn với

$$\overline{x} = T\overline{x} = \sum_{i \in I} \mu_i(\overline{x}) u_i \in co\{u_i : i \in I\} \subset \bigcup_{i \in I} F_i ,$$

(do điều kiện KKM). Vậy Bổ đề KKM được chứng minh. ■

Nhận xét 1.1

Theo các chứng minh trên thì từ Bổ đề KKM ta nhận được Định lí Brouwer và ngược lại, như vậy Bổ đề KKM tương đương với Định lí Brouwer.

1.2. NGUYÊN LÍ ÁNH XẠ KKM

Nguyên lí ánh xạ KKM là một mở rộng của Bổ đề KKM ra không gian vô hạn chiều và là trung tâm của Lý thuyết KKM, một bộ phận cơ bản và sâu sắc của giải tích phi tuyến.

Trước khi phát biểu và chứng minh Nguyên lí ánh xạ KKM, chúng ta định nghĩa ánh xạ KKM.

Cho C là một tập hợp trong không gian vectơ tôpô X, ánh xạ (đa trị) F từ C vào 2^X được gọi là ánh xạ KKM nếu với mọi tập hợp hữu hạn $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ trong C ta có :

$$co\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i).$$

Nguyên lí ánh xạ KKM (Ky Fan [8], 1961)