BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ NGỌC DIỆP

PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG CÁC HÀM HỮU TỶ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Nghệ An - 2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

NGUYỄN THỊ NGỌC DIỆP

PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG CÁC HÀM HỮU TỶ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 62 46 01 04

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

1. PGS. TS. TẠ THỊ HOÀI AN
2. GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Nghệ An - 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả được trình bày trong luận án là hoàn toàn trung thực, được đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Nguyễn Thị Ngọc Diệp

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành tại trường Đại học Vinh dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Tạ Thị Hoài An và GS. TSKH. Hà Huy Khoái. Lời đầu tiên, tác giả xin được bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS. Tạ Thị Hoài An, người Cô nghiêm khắc và mẫu mực, đã định hướng nghiên cứu, đặt bài toán và hướng dẫn tác giả tận tình, chu đáo trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận án.

Tác giả xin được bày tỏ sự kính trọng và gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS. TSKH. Hà Huy Khoái, người đã thường xuyên quan tâm, tạo mọi điều kiện thuận lợi, cùng với những lời động viên, khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin được cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán, Phòng Sau đại học, Ban Giám hiệu, các phòng ban chức năng của Trường Đại học Vinh đã tạo các điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành nhiệm vụ của một nghiên cứu sinh. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp trong Khoa Toán, Tổ Đại số đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả tập trung học tập và nghiên cứu. Tác giả xin cảm ơn Viện Toán học, phòng Lý thuyết số, phòng Đại số, các nhà khoa học của Viện Toán đã giúp đỡ tác giả, tạo môi trường học tập cũng như tham gia các buổi sinh hoạt khoa học của Viện để tác giả có thể hoàn thành luận án.

Nhân dịp này tác giả xin cảm ơn đến TS. Chu Trọng Thanh đã quan tâm cũng như giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập.

Xin cảm ơn các thầy cô, bạn bè về những trao đổi, chia sẻ trong công việc cũng như trong cuộc sống. Xin cảm ơn các anh chị em nghiên cứu sinh của Viện Toán, của Trường Đại học Vinh về những chia sẻ, động viên trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Cuối cùng, tác giả xin kính dâng luận án này đến hương hồn Bố, kính tặng Mẹ, tặng em Ngọc Bảo. Chính Mẹ và em đã chấp nhận mọi khó khăn và dành hết tình thương yêu cho tác giả trong suốt những năm tháng qua để tác giả có thể hoàn thành luận án này.

Nghệ An, 2014

Nguyễn Thị Ngọc Diệp

MỤC LỤC

MỘT SỐ KÝ HIỆU

$\mathbb{C}$: Trường các số phức

k : Trường

$\mathbb{A}^n(k)$: Không gian afin n chiều trên trường k

$\mathbb{P}^n(k)$: Không gian xạ ảnh n chiều trên trường k

$k[x_1, \ldots, x_n]$: Vành đa thức n biến trên trường k

$\deg f$: Bậc của đa thức f

$V(S)$: Tập nghiệm của hệ đa thức S

$\emptyset$: Tập rỗng

$A \subset B$: A là tập con của B

$A \not\subset B$: A không là tập con của B

$A \cap B$: A giao B

$A \cup B$: A hợp B

id_X : Ánh xạ đồng nhất từ tập X vào chính nó

$I(X)$: Iđêan của X

$\Gamma(X)$: Vành toạ độ của X

$\mathcal{J}(V, k)$: Tập hợp tất cả các hàm từ tập V vào k

$gcd(a, b)$: Ước chung lớn nhất của a và b

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Một trong những bài toán cơ bản của Lý thuyết số được nhiều nhà toán học đặc biệt quan tâm là bài toán giải phương trình Diophant. Ban đầu người ta nghiên cứu nghiệm nguyên của những phương trình Diophant với các hệ số là những số nguyên. Sau đó, việc xem xét nghiệm của các phương trình Diophant được mở rộng trên tập các số hữu tỷ và trên trường các hàm như hàm phân hình phức, hàm phân hình không Acsimet, hàm hữu tỷ.

Cho P và Q là các đa thức một biến trên trường đóng đại số k. Bài toán tồn tại hay không các hàm f và g khác hằng thoả mãn phương trình $P(f) = Q(g)$ từ lâu đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Bên cạnh đó, bài toán về sự phân tích đa thức $P(x) - Q(y)$ thành các nhân tử bất khả quy và tính hữu hạn nghiệm nguyên của đa thức này khi k là một trường số cũng được nhiều nhà toán học nghiên cứu. Theo Định lý Faltings và Định lý Picard, hai bài toán này liên quan chặt chẽ với nhau.

Ngay từ những năm đầu thế kỷ XX, một số kết quả của các bài toán này đã được đưa ra bởi các công trình của J. F. Ritt [36], sau đó là A. Ehrenfeucht [19], H. Davenport, D. J. Lewis và A. Schinzel [16], M. Fried [22], ... Khi $Q = cP$, C. C. Yang và P. Li trong [44] đã giới thiệu khái niệm đa thức duy nhất mạnh. Cụ thể, đa thức $P(x)$ trên trường đóng đại số k được gọi là đa thức duy nhất mạnh đối với họ các hàm $\mathcal{F}$ nếu với mọi hàm $f, g \in \mathcal{F}$ và hằng số c khác không nào đó mà $P(f) = cP(g)$ thì $c = 1$ và $f = g$. Cho đến nay bài toán tìm điều kiện để một đa thức là đa thức duy nhất mạnh đối với một họ hàm đã được giải quyết trọn vẹn trong trường hợp phức cũng như trong trường hợp p-adic cho họ các hàm phân hình, hàm nguyên hay hàm hữu tỷ ([2], [3], [4], [5], [8], [24], [30], [43]).

Thời gian gần đây, nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu một mở rộng tự nhiên của vấn đề đa thức duy nhất mạnh, đó là nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình $P(x) = Q(y)$. Theo Định lý Picard, phương trình $P(f) = Q(g)$ không có nghiệm hàm phân hình (f, g) khác hằng nếu và chỉ nếu đường cong $P(x) - Q(y) = 0$ không chứa bất kỳ thành phần nào có giống 0 hoặc 1. Một số điều kiện cần để đường cong $P(x) - Q(y) = 0$ không có nhân tử có giống 0 đã được đưa ra bởi J. F. Ritt ([36]) và U. M. Zannier ([46]). R. M. Avanzi và U. M. Zannier ([11]) đã đưa ra một điều kiện cần để đường cong $P(x) - Q(y) = 0$ không có nhân tử có giống 1. Trong trường số phức, một số điều kiện đối với các bậc của P và Q để phương trình $P(x) = Q(y)$ không có nghiệm hàm phân hình khác hằng cũng được xem xét bởi các tác giả H. H. Khoái và C. C. Yang trong [31], C. C. Yang và P. Li trong [45]. Gần đây, trong [7], T. T. H. An và A. Escassut đã xem xét vấn đề này trong trường không Acsimet. Họ đã đưa ra điều kiện đủ khi P và Q thoả mãn Giả thiết I, giả thiết được giới thiệu lần đầu tiên bởi Fujimoto trong [24], và điều kiện cần và đủ khi $\deg P = \deg Q$.

Cho đến nay, vấn đề thiết lập đặc trưng đầy đủ của đường cong không có nhân tử có giống bé hơn hoặc bằng 1 vẫn đang là vấn đề mở. Đồng thời, vấn đề xem xét phương trình $P(x) = Q(y)$ trên trường các hàm hữu tỷ là đề tài thời sự đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm.

Để góp phần làm sáng tỏ vấn đề nêu trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên