ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

--------📖--------

NGÔ THỊ VIỆT HẰNG

ÁNH XẠ ĐƠN ĐIỆU VÀ ÁP DỤNG VÀO CÁC BÀI TOÁN CÂN BẰNG KINH TẾ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2008

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

-------- --------

NGÔ THỊ VIỆT HẰNG

ÁNH XẠ ĐƠN ĐIỆU VÀ ÁP DỤNG VÀO CÁC BÀI TOÁN CÂN BẰNG KINH TẾ

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN VĂN QUÝ

THÁI NGUYÊN – 2008

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Ánh xạ đơn điệu là một trong những lĩnh vực của giải tích hiện đại đã và đang được rất nhiều nhà toán học hàng đầu thế giới nghiên cứu. Đặc biệt phải kể đến như: R. T. Rockafellar, F. E. Browder, (Xem [5], [14]). Bên cạnh các kết quả đặc biệt có ý nghĩa về mặt lý thuyết, ánh xạ đơn điệu là một trong những công cụ được sử dụng nhiều và rất có hiệu quả trong lĩnh vực toán ứng dụng như lĩnh vực tối ưu hóa. Nó giúp ích cho việc chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm cho rất nhiều các lớp bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán tối ưu. Đề tài của bản luận văn này là nghiên cứu về toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert thực và ứng dụng của nó trong việc khảo sát các bài toán bất đẳng thức biến phân và đặc biệt là mô hình kinh tế nổi tiếng Nash - Cournot. Vì thế, đây là một đề tài vừa có ý nghĩa về mặt lý thuyết, đồng thời vừa có ý nghĩa thực tiễn cao. Nội dung chính của bản luận văn là trình bày một cách hệ thống các kiến thức cơ sở có liên quan; khái niệm, tính chất và các điều kiện cho các toán tử đơn điệu; áp dụng toán tử đơn điệu trong bài toán bất đẳng thức biến phân và mô hình kinh tế Nash - Cournot. Ngoài phần mở đầu, kết luận và các tài liệu tham khảo, các kết quả nghiên cứu trong bản luận văn được trình bày thành ba chương với tiêu đề:

Chương 1: Toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert.

Chương 2: Bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu.

Chương 3: Mô hình Nash - Cournot với toán tử đơn điệu.

Nội dung chính của các chương là:

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ sở về giải tích lồi phục vụ cho việc nghiên cứu toán tử đơn điệu. Sau đó, trình bày các khái niệm về toán tử đơn điệu, đơn điệu tuần hoàn và đơn điệu cực đại. Song song với các khái niệm này là một số kết quả về tính chất, điều kiện của toán tử đơn điệu.

Chương 2: Trình bày về bài toán bất đẳng thức biến phân và các bài toán liên quan. Sau đó, trình bày một số kết quả về việc sử dụng toán tử đơn điệu trong việc chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân.

Chương 3: Trình bày về mô hình kinh tế Nash - Cournot trong lĩnh vực sản xuất kinh doanh. Sau đó, sử dụng toán tử đơn điệu để nghiên cứu về sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm cho mô hình.

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Để hoàn thành được bản luận văn này, trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sĩ Nguyễn Văn Quý, người thầy đã trực tiếp tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thiện bản luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy giáo, các cô giáo trong trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Viện Toán học Việt Nam, trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin cảm ơn tới cơ quan, gia đình và bạn bè đã luôn động viên, ủng hộ giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn tốt nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2008

Ngô Thị Việt Hằng

Chương 1

TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Nội dung chính của chương bao gồm: một số kiến thức cơ sở về không gian Hilbert thực và giải tích lồi. Tiếp sau đó là các khái niệm về ánh xạ đơn điệu, đơn điệu tuần hoàn, đơn điệu cực đại. Đồng thời trình bày một số kết quả liên quan đến tính đơn điệu của các toán tử đơn trị và đa trị trong không gian Hilbert.

1.1. Không gian Hilbert thực

Chúng ta bắt đầu từ không gian đơn giản nhất là không gian véc tơ tuyến tính trên trường số thực. Đó là một tập hợp khác rỗng X mà trên đó có trang bị hai phép toán: phép toán cộng hai véc tơ và phép toán nhân một số thực với một véc tơ:

$$x_1 + x_2 \in X, \ \forall x_1, x_2 \in X;$$
$$\lambda x \in X, \ \forall x \in X, \ \lambda \in R.$$

- Nếu trên X được trang bị một tô pô τ là một họ các tập con của X thỏa mãn các tính chất:
  1. $\varnothing \in \tau;\ X \in \tau$;
  2. $A \in \tau, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$;
  3. $A_t \in \tau\ (t \in T) \Rightarrow \bigcup_{t \in T} A_t \in \tau$,

(T là tập chỉ số bất kỳ) thì X được gọi là không gian véc tơ tô pô và thường ký hiệu là (X, τ).

- Nếu trên X được trang bị một metric $\rho(\,.\,)$ với các tính chất:
  1. $\rho(x, y) \geq 0,\ x, y \in X;\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
  2. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$;
  3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z),\ \forall x, y, z \in X$

thì X được gọi là không gian metric.

- Nếu trên X được trang bị một chuẩn $\|,\|$ với các tính chất:

  1. $\| x \| \geq 0, \forall x \in X; \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
  2. $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|, \forall x \in X, \alpha \in R$;
  3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \forall x, y \in X$

thì X được gọi là một không gian định chuẩn.

Định nghĩa 1.1. *Cho X là một không gian tuyến tính thực. X được gọi là không gian tiền Hilbert nếu: với mọi $x, y \in H$, xác định một số thực ký hiệu là $\langle x, y \rangle$ gọi là tích vô hướng của $x, y \in X$, thỏa mãn các tính chất sau:*

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in R$;
4. $\langle x, x \rangle > 0$ *nếu* $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ *nếu* $x = 0$.

Mệnh đề 1. 1 (Xem [4]). *Mọi không gian tiền Hilbert X là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn được xác định:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in X .$$

Định nghĩa 1.2. *Cho X là một không gian định chuẩn. Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là dãy cơ bản trong X nếu* :

$$\lim_{m,n \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Nếu trong X,, mọi dãy cơ bản đều hội tụ, tức là $\|x_n - x_m\| \to 0$ kéo theo sự tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $x_n \to x_0$, thì *X được gọi là không gian đủ.*

Định nghĩa 1.3. *Không gian tiền Hilbert và đủ gọi là không gian Hilbert, trong luận văn này ta thống nhất ký hiệu H là một không gian Hilbert thực.*

Định nghĩa 1.4. Ha*i véc tơ $x, y \in H$ được gọi là hai véc tơ trực giao với nhau, kí hiệu là $x \perp y$, nếu $\langle x, y \rangle = 0$.*

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra các tính chất đơn giản sau đây:

1. $0 \perp x, \forall x \in X$;
2. $x \perp y \Rightarrow y \perp x$;
3. $x \perp \{y_1, y_2, ..., y_n\} \Rightarrow x \perp \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n$,

   $n \in N^*$, $\alpha_i \in R$, $i = 1, 2, ..., n$;
4. $x \perp y_n, y_n \to y$ *khi* $n \to \infty$ *thì* $x \perp y$.

Định nghĩa 1.5. *Cho tập* $M \subset H$*, phần bù trực giao của* M*, kí hiệu* $M^\perp$*, là tập hợp sau:*

$$M^\perp = \{x \in H : x \perp y, \forall y \in M\}.$$

Định lý 1.1 (Định lý F.Riesz). *Với mỗi véc tơ* a *cố định thuộc không gian Hilbert* H*, hệ thức*:

$$f(x) = \langle a, x \rangle. \tag{1.1}$$

Xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ *trên không gian* H*, với*

$$\|f\| = \|a\|. \tag{1.2}$$

Ngược lại, bất kỳ phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ *nào trên không gian Hilbert* H *cũng đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng (1.1), trong đó* a *là một véc tơ của* H *thỏa mãn (1.2).*

Chứng minh.

Phần thứ nhất của định lý, ta dễ chứng minh được vì $f(x) = \langle a, x \rangle$ rõ ràng là một phiếm hàm tuyến tính và do :

$$|f(x)| = |\langle a, x \rangle| \le \|a\| \times \|x\|. \tag{1.3}$$

$$|f(a)| = \langle a, a \rangle = \|a\| \times \|a\|. \tag{1.4}$$

nên phiếm hàm đó giới nội và thỏa mãn (1.2).

Để chứng minh phần ngược lại, ta xét một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ trên không gian Hilbert H. Tập hợp

$$M = \{x \in H : f(x) = 0\}$$

rõ ràng là một không gian con đóng của H. Nếu $M^{\perp}=\{0\}$ thì dựa vào cách phân tích $x=y+z$ với $y\in M, z\in M^{\perp}$, ta thấy rằng $z=0$, cho nên $f(x)=f(y)=0$ với mọi $x\in H$, do đó $f(x)=\langle 0,x\rangle$, nghĩa là ta có cách biểu diễn (1.1) với $a=0$. Vậy chỉ còn phải xét trường hợp $M^{\perp}\neq\{0\}$. Ta có $f(x_0)\neq 0$, nên véc tơ :

$$a=\frac{f(x_0)}{\langle x_0,x_0\rangle}x_0\neq 0.$$

Với mọi $x\in H$,

$$y=x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\in M$$

vì

$$f(y)=f(x)-\frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0)=0.$$

Mà $x_0\in M^{\perp}$, vậy $\langle y,x_0\rangle=0$, tức là

$$\left\langle x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0,x_0\right\rangle=\langle x,x_0\rangle-\frac{f(x)}{f(x_0)}\langle x_0.x_0\rangle=0$$

hay:

$$f(x)=\left\langle \frac{f(x_0)}{\langle x_0,x_0\rangle}x_0,x\right\rangle=\langle a,x\rangle.$$

Như vậy, $f(x)$ có dạng (1.2). Cách biểu diễn đó là duy nhất, vì nếu $f(x)=\langle a',x\rangle$ thì $\langle a-a',x\rangle=0$, nghĩa là $a-a'=0$. Cuối cùng do (1.3) và (1.4) nên phải có (1.2) như trên. Định lí được chứng minh. □

Định lý vừa chứng minh cho phép lập một tương ứng một đối một giữa các phiếm hàm tuyến tính liên tục f trên H và các véc tơ $a\in H$. Tương ứng đó là một phép đẳng cự tuyến tính, cho nên nếu ta đồng nhất hóa phiếm hàm f với véc tơ a sinh ra nó thì ta có $H^* = H$, nghĩa là : không gian Hilbert trùng với không gian liên hợp của nó.

Cho A là toán tử tuyến tính liên tục trong không gian Hilbert H. Với mỗi $y \in H$ cố định ta xét phiếm hàm $f : H \to R$ được xác định như sau:

$$f(x) = \langle Ax, y \rangle, x \in H.$$

Dễ thấy f là phiếm hàm tuyến tính, liên tục trong H nên theo định lý 1.1 về dạng tổng quát của phiếm hàm tuyến tính liên tục, tồn tại duy nhất $y^* \in H$ để

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle, \forall x \in H.$$

Định nghĩa 1.6. *Cho A là một toán tử trong không gian Hilbert H, ánh xạ $A^* : H \to H$ xác định như sau:*

$$\forall y \in H,\ A^* y = y^*$$

trong đó:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle = \langle x, y^* \rangle$$

khi đó A^* được gọi là toán tử liên hợp của toán tử A.

Nhận xét 1.1. Toán tử liên hợp A^* nếu tồn tại là duy nhất.

1.2. Tập lồi và hàm lồi

Định nghĩa 1.7. *Tập $D \subset H$ được gọi là tập lồi nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$ và mọi số thực $0 \le \lambda \le 1$ ta đều có:*

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in D.$$

Nhận xét 1.2. Theo định nghĩa, tập $\varnothing$ được xem là tập lồi .

Định nghĩa 1. 8. *Tập $K \subseteq H$ được gọi là nón có đỉnh tại 0 nếu:*

$$\forall x \in K, \forall \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in K.$$

$K \subseteq H$ được gọi là nón có đỉnh tại x_0 nếu $K - x_0$ là nón có đỉnh tại 0.