ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ VĂN NHÂN

BẤT ĐẲNG THỨC TRÊN THANG THỜI GIAN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ VĂN NHÂN

BẤT ĐẲNG THỨC TRÊN THANG THỜI GIAN VÀ ỨNG DỤNG

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

MÃ SỐ: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **PGS. TS. Tạ Duy Phượng**

Thái Nguyên – 2014

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Lý thuyết về *thang thời gian* (time scale) được trình bày lần đầu tiên bởi Stefan Hilger vào năm 1988 trong luận án Tiến sĩ khoa học của ông (dưới sự hướng dẫn của Bernd Aulbach), nhằm mục đích thống nhất nghiên cứu các bài toán mô tả bởi các hệ liên tục và rời rạc.

Cho đến nay đã có một số quyển sách, hàng chục luận án Tiến sĩ và hàng nghìn bài báo nghiên cứu về thang thời gian. Giải tích (phép tính vi phân và tích phân) trên thang thời gian đã được các tác giả nghiên cứu khá sâu rộng và đầy đủ. Và từ đó nhiều kết quả quen thuộc trong trường hợp liên tục và rời rạc đã được "chuyển dịch" sang thang thời gian. Chẳng hạn, đã có những kết quả rất sâu sắc về tính ổn định, tính dao động, bài toán giá trị biên,…của hệ động lực trên thang thời gian.

Các bất đẳng thức đóng vai trò quan trọng trong toán học nói chung, trong nghiên cứu hệ động lực liên tục và hệ động lực rời rạc nói riêng. Hầu hết các bất đẳng thức này đã được mở rộng sang cho thang thời gian.

Với mong muốn tìm hiểu một vấn đề mà thời gian gần đây đang được nhiều nhà toán học quan tâm là thang thời gian, đồng thời so sánh các bất đẳng thức vi phân và sai phân với bất đẳng thức trên thang thời gian, để từ đó có cái nhìn tổng quát hơn về bất đẳng thức, tôi đã chọn *Bất đẳng thức trên thang thời gian và Ứng dụng* làm đề tài luận văn cao học của mình.

Luận văn gồm phần Mở đầu, hai chương, phần Kết luận và các Tài liệu tham khảo.

Trong chương 1, chúng tôi nhắc lại khái niệm thang thời gian, các khái niệm toán tử nhảy tiến, toán tử nhảy lùi, hàm hạt, các điểm trù mật và các điểm cô lập; các khái niệm và tính chất của các phép tính vi phân, tích phân trên thang thời gian cũng như đối chiếu kết quả trên một số thang thời gian thường gặp.

Chương 2 chúng tôi trình bày các bất đẳng thức cơ bản và quan trọng trên thang thời gian như Bất đẳng thức Hölder, Bất đẳng thức Gronwall, Bất đẳng thức Bihari, Bất đẳng thức Opial, Bất đẳng thức Wirtinger, Bất đẳng thức Lyapunov và một số bất đẳng thức khác; đồng thời chúng tôi cũng tham chiếu các bất đẳng thức trên đối với các trường hợp thang thời gian liên tục và thang thời gian rời rạc.

Để hoàn thành luận văn này, trước nhất tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới PGS.TS. Tạ Duy Phượng, người thầy đã dành thời gian hướng dẫn, tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu và tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Ban giám hiệu, Phòng Sau đại học, Phòng Đào tạo, Khoa Toán-Tin Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin được cảm ơn Trường trung học phổ thông Quảng Hà, Tỉnh Quảng Ninh, nơi tôi công tác, đã tạo mọi điều kiện để tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn đặc biệt đến những người thân, đồng nghiệp và những người bạn đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2014

Người thực hiện

Đỗ Văn Nhân

Chương 1

GIẢI TÍCH TRÊN THANG THỜI GIAN

1.1. Thang thời gian

1.1.1. Định nghĩa thang thời gian

Định nghĩa 1.1 *Thang thời gian* (time scale) là một tập con đóng khác rỗng bất kì trong tập hợp các số thực $\mathbb{R}$. Thang thời gian thường được kí hiệu là $\mathbb{T}$.

Ví dụ 1.1

1.1.1) Các tập $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, [1;2] \cup [3;4], [1;2] \cup \mathbb{N}$ trong đó $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, còn $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ là những thang thời gian.

1.1.2) Các tập $\mathbb{T} = \bigcup_{k=0, k\in\mathbb{N}_0}^{\infty} [2k, 2k+1]$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{T} = \{2^z : z \in \mathbb{Z}\}$ là những thang thời gian.

1.1.3) Cho $q > 1$ là một số hữu tỉ cố định. Khi đó tập hợp

$\mathbb{T}_q = \{q^n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{1, q, q^2, q^3, ...\}$ cũng là một thang thời gian.

1.1.4) Cho $n \in \mathbb{N}_0$, các số điều hòa H_n được xác định như sau

$$H_0 = 0,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Khi đó $\mathbb{T} = \{H_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ là một thang thời gian.

1.1.5) Các tập $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, [0;1)$ không phải là thang thời gian vì chúng tuy nằm trong $\mathbb{R}$ nhưng không phải là tập đóng trong $\mathbb{R}$.

1.1.6) Mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ cũng không phải là thang thời gian vì nó là tập đóng nhưng không nằm trong $\mathbb{R}$.

Hai thang thời gian cơ bản và rất quan trọng thường gặp trong các chứng minh trước đây là tập số thực $\mathbb{R}$ và tập số nguyên $\mathbb{Z}$.

1.1.2. Các định nghĩa cơ bản

Định nghĩa 1.2 Cho $\mathbb{T}$ là một thang thời gian, với mỗi $t \in \mathbb{T}$ ta có các định nghĩa sau:

Toán tử nhảy tiến (forward jump) là toán tử $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ được xác định bởi

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T}, s > t\}.$$

Toán tử nhảy lùi (backward jump) là toán tử $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ được xác định bởi

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T}, s < t\}.$$

Trong định nghĩa này chúng ta quy ước $\inf\varnothing := \sup\mathbb{T}$ và $\sup\varnothing := \inf \mathbb{T}$, trong đó $\varnothing$ là tập hợp rỗng.

Ví dụ 1.2

1.2.1) Cho thang thời gian $t \in \mathbb{R}$. Khi đó với mọi $t \in \mathbb{R}$ ta có

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf (t, \infty) = t.$$

Tương tự, $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t.$

Như vậy, $\sigma(t) = \rho(t) = t$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

1.2.2) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Khi đó với mọi $t \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf \{t+1, t+2, t+3, ...\} = t+1.$$

Tương tự $\rho(t) = t - 1$ với mọi $t \in \mathbb{Z}$.

1.2.3) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$. Ta có $\sigma(t) = t + \frac{1}{2}$ và $\rho(t) = t - \frac{1}{2}$.

1.2.4) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \left\{ n^2 : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Nếu $t \in \mathbb{T}$ thì tồn tại số $n \in \mathbb{N}_0$ sao cho $t = n^2$ hay $\sqrt{t} = n$. Ta có:

$$\sigma(t) = \sigma(n^2) = \left(n+1\right)^2 = \left(\sqrt{t}+1\right)^2 \text{ và } \rho(t) = \rho(n^2) = \left(n-1\right)^2 = \left(\sqrt{t}-1\right)^2.$$

1.2.5) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \left\{ 2^{z} : z \in \mathbb{Z} \right\}$. Nếu $t \in \mathbb{T}$ thì tồn tại số $z \in \mathbb{Z}$ sao cho $t = 2^z > 0$ hay $z = \log_2 t$. Ta có:

$$\sigma(t) = \sigma(2^z) = 2^{z+1} = 2^{\log_2 t+1} = 2t \text{ và } \rho(t) = \rho(2^z) = 2^{z-1} = 2^{\log_2 t-1} = \frac{1}{2}t.$$

Định nghĩa 1.3 Cho $\mathbb{T}$ là thang thời gian.

Điểm $t \in \mathbb{T}$ được gọi là *điểm cô lập phải* (right-scattered) nếu $t < \sigma(t)$.

Điểm $t \in \mathbb{T}$ được gọi là *điểm cô lập trái* (left-scattered) nếu $\rho(t) < t$.

Điểm $t \in \mathbb{T}$ được gọi là *điểm cô lập* (isolated) nếu $\rho(t) < t < \sigma(t)$.

Ví dụ 1.3

1.3.1) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ thì mọi điểm $t \in \mathbb{T}$ đều là điểm cô lập.

1.3.2) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \left\{ \frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ (xem ví dụ 1.2.3). Ta có điểm $t = 0$ là điểm cô lập phải, và mọi $t \in \mathbb{T}$, $t \neq 0$ đều là điểm cô lập.

1.3.3) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \left\{ 2^{z} : z \in \mathbb{Z} \right\}$ (xem ví dụ 1.2.5). Ta có $\frac{1}{2}t = \rho(t) < t < \sigma(t) = 2t$ với mọi $t \in \mathbb{T}$. Do đó mọi điểm $t \in \mathbb{T}$ đều là điểm cô lập.

Định nghĩa 1.4 Cho $\mathbb{T}$ là thang thời gian.

Điểm $t \in \mathbb{T}$ được gọi là *điểm trù mật phải* (right-dense) nếu $t = \sigma(t)$.

Điểm $t \in \mathbb{T}$ được gọi là *điểm trù mật trái* (left-dense) nếu $\rho(t) = t$.

Điểm $t \in \mathbb{T}$ được gọi là *điểm trù mật* (dense) nếu $\rho(t) = t = \sigma(t)$.

Ví dụ 1.4

1.4.1) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ thì mọi điểm $t \in \mathbb{T}$ đều là điểm trù mật.

1.4.2) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \bigcup_{k=0, k\in\mathbb{N}}^{\infty} [2k, 2k+1]$. Ta có

Nếu $t \in (2k, 2k+1)$ thì $\sigma(t) = t = \rho(t)$ nên t là điểm trù mật.

Nếu $t = 2k+1$ thì $\sigma(t) = t+1 = 2k+2 > t$ và $\rho(t) = t$ nên t là điểm cô lập phải và là điểm trù mật trái.

Nếu $t = 2k$ thì $\sigma(t) = t = 2k$ và $\rho(t) = t-1 = 2k-1 < t$ nên t là điểm cô lập trái và là điểm trù mật phải.

1.4.3) Cho thang thời gian $\mathbb{T} = \left\{ H_n : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ (Xem ví dụ 1.1.4). Ta có

$$\sigma(H_n) = H_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = H_n + \frac{1}{n+1},\ \rho(H_n) = H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_n - \frac{1}{n} \text{ và}$$

$$\rho\left(H_0\right) = H_0.$$

Suy ra H_0 là điểm trù mật trái và cô lập phải. Mọi điểm $H_n \neq H_0$ của $\mathbb{T}$ đều là điểm cô lập.

1.4.4) Cho $q > 1$, ta xác định $q^{\mathbb{Z}} := \left\{ q^k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ và $\overline{q^{\mathbb{Z}}} := q^{\mathbb{Z}} \cup \left\{0\right\}$. Xét $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$.

Ta có

$$\sigma(t) = \inf\left\{ q^n : n \in \left[m+1, \infty\right) \right\} = q^{m+1} = q.q^m = qt$$

nếu $t = q^m \in \mathbb{T}$ và rõ ràng là $\sigma(0) = 0$. Vì vậy ta được

$$\sigma(t) = qt \quad \text{và} \quad \rho(t) = \frac{t}{q} \quad \text{với mọi } t \in \mathbb{T}.$$

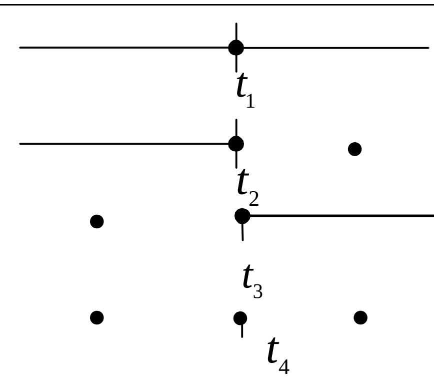
Do đó 0 là điểm trù mật phải và mọi điểm khác trong $\mathbb{T}$ đều là điểm cô lập.

Ta có bảng tóm tắt 1.1

t là điểm cô lập phải	$t < \sigma(t)$	t right-scattered
t là điểm trù mật phải	$t = \sigma(t)$	t right-dense
t là điểm cô lập trái	$\rho(t) < t$	t left-scattered
t là điểm trù mật trái	$\rho(t) = t$	t left-dense
t là điểm cô lập	$\rho(t) < t < \sigma(t)$	t isolated
t là điểm trù mật	$\rho(t) = t = \sigma(t)$	t dense

Bảng 1.1

Bảng 1.2 dưới đây mô tả hình ảnh hình học của các điểm

t_1: Điểm trù mật t_2: Điểm trù mật trái và cô lập phải t_3: Điểm trù mật phải và cô lập trái t_4: Điểm cô lập	

Bảng 1.2