ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - -

LÊ THỊ CHUNG

BÀI TOÁN BIÊN ELLIPTIC MỞ RỘNG TRONG NỬA KHÔNG GIAN CHO PHƯƠNG TRÌNH VỚI HỆ SỐ HẰNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - -

LÊ THỊ CHUNG

BÀI TOÁN BIÊN ELLIPTIC MỞ RỘNG TRONG NỬA KHÔNG GIAN CHO PHƯƠNG TRÌNH VỚI HỆ SỐ HẰNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. HÀ TIẾN NGOẠN

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết bài toán biên elliptic cổ điển thường được xét cho phương trình elliptic cấp chẵn với số điều kiện biên bằng nửa số cấp của phương trình.

Luận văn xét các phương trình elliptic tuyến tính với hệ số hằng nhưng không nhất thiết là elliptic đúng đắn, tức là cấp của phương trình không nhất thiết là chẵn, ngay trong trường hợp cấp chẵn thì số các nghiệm đặc trưng với phần ảo dương và âm không nhất thiết là bằng nhau.

Luận văn gồm Mở đầu, hai chương, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương I: Nghiên cứu bài toán biên cho phương trình vi phân thường trên nửa đường thẳng với hệ số hằng. Chương này đưa ra đánh giá đối với nghiệm trên nửa đường thẳng.

Chương II: Trình bày bài toán biên cho phương trình elliptic với cấp bất kỳ trong nửa không gian. Trong đó số điều kiện biên sẽ bằng số các nghiệm đặc trưng của phương trình với phần ảo dương. Trên cơ sở kết quả Chương I, Luận văn trình bày đánh giá tiên nghiệm của bài toán, phát biểu và chứng minh định lý về tồn tại duy nhất nghiệm sau đó đưa ra một số ví dụ minh họa.

Luận văn được hoàn thành với sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của PGS.TS Hà Tiến Ngoạn. Nhân dịp này em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Em xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu, phòng Đào tạo Sau đại học trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K6D đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Luận văn được hoàn thành với tài liệu tham khảo chính là chương 7 cuốn M. Schechter, 1977, Modern Methods in Partial Differential Equations, An Introduction, McGraw-Hill Inc.

Tác giả

Lê Thị Chung

Chương 1

Các đánh giá đối với bài toán biên trên nửa đường thẳng

1.1 Bài toán biên trên nửa đường thẳng. Các đánh giá

Trước tiên, ta nhắc lại các kiến thức liên quan đến bài toán biên trên nửa đường thẳng.

1.1.1 Toán tử vi phân với hệ số hằng

Trong chương này ta ký hiệu t là biến độc lập, biến thiên trên đường thẳng $\mathbb{R}$. Toán tử vi phân thường với hệ số hằng có dạng:

$$P\left(D_t\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k D_t^k$$

trong đó a_k là các số phức, $D_t = -i\frac{\partial}{\partial t}$, $i^2 = -1$.
Đa thức tương ứng bậc m sau đây

$$P\left(z\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k,\ z \in \mathbb{C}$$

được gọi là đa thức đặc trưng của toán tử $P\left(D_t\right)$.

1.1.2 Bài toán biên trên nửa đường thẳng

Xét bài toán biên trên nửa đường thẳng sau đây
Ta có toán tử

$$P(D_t)u = f(t) \qquad t > 0 \tag{1.1}$$

với điều kiện biên

$$\left. Q_i\left(D_t\right)u\right|_{t=0} = U_i, i = 1, 2, 3, .., r \tag{1.2}$$

trong đó

$$P\left(D\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k D_t^k \qquad Q_i\left(D\right) = \sum_{k=0}^{m_i} b_{ik} D_t^k$$

Đặt $P\left(z\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j.z^j$ và $Q_i\left(z\right) = \sum\limits_{k=0}^{m_i} b_{ik}z^k$. Đa thức $Q_i\left(z\right)$ có bậc m_j nhỏ hơn m.

Giả sử phương trình $P(z) = 0$ không có nghiệm thực và có r nghiệm phức kể cả bội với phần ảo dương.

Do đó, nếu $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m$ là các nghiệm, chúng ta có thể sắp thứ tự chúng sao cho

$$Im\tau_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant r. \tag{1.3}$$

Ta đặt

$$P_+\left(z\right) = \left(z - \tau_1\right) ... \left(z - \tau_m\right) \tag{1.4}$$

và

$$P_-\left(z\right) = \frac{P\left(z\right)}{P_+\left(z\right)}. \tag{1.5}$$

Với bất kỳ đa thức $Q(z)$ có bậc nhỏ hơn m, chúng ta có thể phân tích $\frac{Q(z)}{P(z)}$ thành tổng hữu tỷ

$$\frac{Q\left(z\right)}{P\left(z\right)} = \frac{Q_+\left(z\right)}{P_+\left(z\right)} + \frac{Q_-\left(z\right)}{P_-\left(z\right)} \tag{1.6}$$

trong đó $Q_+\left(z\right)$ có bậc nhỏ hơn r và $Q_-\left(z\right)$ có bậc nhỏ hơn $m - r$. Giả sử chúng ta có r đa thức như vậy. Đặt

$$\alpha_{\mathrm{ij}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{i+}(\tau)\,\overline{Q_{j+}(\tau)}}{|P_+(\tau)|^2} d\tau \qquad 1 \le i, j \le r, \tag{1.7}$$

$$\beta_{\mathrm{ij}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{i-}(\tau)\,\overline{Q_{j-}(\tau)}}{|P_-(\tau)|^2} d\tau \qquad 1 \le i, j \le r. \tag{1.8}$$

1.1.3 Đánh giá trên nửa đường thẳng

Dưới đây ta phát biểu định lý quan trọng nhất của Chương 1.

Xét ma trận Hermitian $A = (\alpha_{ij})\,, B = (\beta_{ij})$ trong đó α_{ij} và β_{ij} được xác định tương ứng bởi (1.7) và (1.8). Chúng ta sẽ chứng minh định lý sau đây.

Định lý 1.1. *Giả sử tồn tại ma trận A^{-1} và tồn tại một hằng số K_1, sao cho*

$$BA^{-1}B \le K_1 B. \tag{1.9}$$

Nếu $R(z)$ là đa thức bất kỳ thoả mãn

$$|R(\tau)| \leqslant C_1 |P(\tau)| \qquad \tau \epsilon \mathbb{R} \tag{1.10}$$

thì tồn tại hằng số C chỉ phụ thuộc vào C_1 và K_1, sao cho

$$\int\limits_0^\infty |\mathrm{R}(\mathrm{D_t})\,u|^2\,\mathrm{dt} \le \mathrm{C}\left[\int\limits_0^\infty |\mathrm{P}(\mathrm{D_t})\,u|^2\,\mathrm{dt} + \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{\mathrm{r}} \alpha^{\mathrm{ij}} U_i \overline{U}_j\right] \qquad u \in S(0,\infty) \tag{1.11}$$

trong đó $(\alpha^{ij}) = A^{-1}$, và

$$U_i = Q_i(D_t)\,u(0) \qquad 1 \le i \le r. \tag{1.12}$$

Bất đẳng thức (1.9) có nghĩa là với mọi véc tơ $U = (U_1, ..., U_r)$, ta có

$$U^* B A^{-1} B U \le K_1 U^* B U.$$

Phần chứng minh sẽ được trình bày trong Mục 1.3

1.2 Một số bổ đề

Trước tiên ta ký hiệu không gian các hàm khả vi có độ giảm nhanh ở 0 và ∞

$$S(0,\infty) = \left\{ v(t) \in C^{\infty}[0,\infty); (1+t)^k \left| D_t^l v(t) \right| < \infty, \forall k, l \right\}$$

Tương tự, không gian các hàm khả vi có độ giảm nhanh ở $-\infty$ và 0

$$S(-\infty,0) = \left\{ v(t) \in C^{\infty}[-\infty,0); (1+t)^k \left| D_t^l v(t) \right| > -\infty, \forall k, l \right\}$$

Trong việc chứng minh Định lý 1.1, chúng ta phải sử dụng các bổ đề dưới đây

Bổ đề 1.1. *Giả sử* $u \in S(0,\infty)$ *và*

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & t > 0, \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Nếu

$$F(h)(\tau) = \tilde{h}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} h(t) dt \tag{1.14}$$

là biến đổi Fourier của hàm $h(\tau)$ *trên* $\mathbb{R}$*, thì ta có*

$$\widetilde{D_t w} = \tau \widetilde{w} + iu(0). \tag{1.15}$$

Tương tự, nếu $v \in S(-\infty,0)$ *và*

$$g(t) = \begin{cases} v(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

thì

$$\widetilde{D_t g} = \tau \widetilde{g} - iv(0). \tag{1.17}$$

Dưới đây ta sẽ thường dùng $f(h)$ sẽ là biến đổi Fourier của hàm h thay vì $\tilde{h}$.

Chứng minh

Chúng ta bắt đầu từ đẳng thức (1.15). Do đẳng thức (1.14)

$$F\left(D_t \mathrm{w}\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-it\tau} D_t u\,(t) dt$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} D_t \left[e^{-it\tau} u\,(t)\right] dt - \int\limits_0^{+\infty} u\,(t)\, D_t \left[e^{-it\tau}\right] dt$$

$$= -i\left[-u\,(0)\right] + \tau\tilde{\mathrm{w}}.$$

Điều này đưa đến phương trình (1.15). Để chứng minh đẳng thức (1.17) cần lưu ý rằng

$$F\left(D_t g\right) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-it\tau} D_t v\,(t) dt$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} D_t \left[e^{-it\tau} v\,(t)\right] dt - \int\limits_{-\infty}^{0} v\,(t)\, D_t \left[e^{-it\tau}\right] dt$$

$$= -i\left[-v\,(0)\right] + \tau\tilde{\mathrm{g}}.$$

Bổ đề 1.1 đã được chứng minh. □

Bổ đề 1.2. *Nếu $f \in S\,(0, \infty)$, và*

$$G\,(z) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-itz} f\,(t) dt$$

thì $G(z)$ là một hàm nguyên bị chặn trong nửa mặt phẳng phức với $\mathrm{Im} z \leq 0$. *Tương tự, nếu $f \in S\,(-\infty, 0)$ và H(z) được cho bởi*

$$H\,(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-itz} h\,(t) dt$$

thì $H(z)$ là một hàm nguyên bị chặn trong nửa mặt phẳng phức với $\mathrm{Im} z \geq 0$.

. **Chứng minh** Dễ dàng chứng minh rằng $G(z)$ và $H(z)$ là nguyên bằng việc lấy đạo hàm dưới dấu tích phân trên cơ sở nhận xét rằng tích phân hội