ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - -

LÊ VĂN DUY

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT SỐ VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học:
TS. NGUYỄN VĂN MINH

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Sau một thời gian nghiên cứu, luận văn thạc sỹ của tôi đã được hoàn thành với tên đề tài **Một số định lý cơ bản của lý thuyết số và áp dụng**. Những kết quả mà luận văn có được đó là nhờ sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của TS. Nguyễn Văn Minh. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo và Khoa Toán - Tin của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này trong thời gian vừa qua. Đội ngũ cán bộ của phòng đào tạo và Khoa Toán - Tin đã hết lòng ủng hộ, giúp đỡ lớp Cao học Toán K6A chúng tôi với một thái độ nhiệt tình và thân thiện nhất. Điều này sẽ mãi là ấn tượng rất tốt đẹp trong lòng mỗi chúng tôi đối với nhà trường.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và những người đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2014

Người thực hiện

Lê Văn Duy

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết số là một ngành của toán học lý thuyết nghiên cứu về tính chất của số nói chung và của số nguyên nói riêng, cũng như những lớp rộng hơn các bài toán mà phát triển từ những nghiên cứu của nó. Trong lý thuyết số, số nguyên tố là một trong những vấn đề trọng tâm của lý thuyết số. Một câu hỏi đương nhiên được đặt ra là "có bao nhiêu số nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên?". Nếu chỉ có một số hữu hạn các số nguyên tố thì vấn đề số nguyên tố sẽ trở nên rất đơn giản, và các vấn đề khác trong số học cũng trở thành đơn giản. Song, ngay từ thời Euclid người ta đã biết rằng tập các số nguyên tố là vô hạn. Từ đó một loạt các câu hỏi được đặt ra. Bài toán về mật độ các số nguyên tố trong dãy số tự nhiên, bài toán tìm một biểu thức lấy giá trị là các số nguyên tố với mọi giá trị tự nhiên của biến, bài toán tìm số nguyên tố thứ n,.... Một vấn đề lớn của lý thuyết số nguyên tố là nghiên cứu hàm $\pi(x)$, biểu thị số các số nguyên tố không vượt quá x, với x là một số thực dương.

Luận văn **Một số định lý cơ bản của lý thuyết số và áp dụng** trình bày một số vấn đề liên quan đến mảng số nguyên tố và các định lý quan trọng của lý thuyết số.

2. Mục đích nghiên cứu

Đề tài "**Một số định lý cơ bản của lý thuyết số và áp dụng**" nhằm hệ thống lại một số định lý quan trọng của lý thuyết số và áp dụng các định lý đó vào giải toán sơ cấp.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu về số nguyên tố, các định lý cơ bản của lý thuyết số, nhằm hệ thống các định lý các bài toán liên quan đến đề tài nghiên cứu.

4. Phương pháp nghiên cứu

Tổng hợp các tài liệu liên quan, nắm vững cốt lõi của nội dung kiến thức từ đó sắp xếp, trình bày hệ thống và khai thác các ứng dụng theo đề tài nghiên cứu.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Có được một tài liệu phù hợp cho việc dạy học ở cấp trung học cơ sở và trung học phổ thông.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, 2 chương, kết luận và tài liệu tham khảo.
Chương 1. Số nguyên tố và một số định lý quan trọng của số học
Chương 2. Áp dụng giải một số bài toán sơ cấp

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2014
Người thực hiện
Lê Văn Duy

Chương 1

Số nguyên tố và một số định lý quan trọng của lý thuyết số

Chương này trình bày một vài tính chất cơ bản của số nguyên tố và một số định lý quan trọng của lý thuyết số. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu tham khảo [2] [3] [5].

1.1 Định nghĩa số nguyên tố và một số tính chất

1.1.1 Định nghĩa số nguyên tố

Trong toán học có nhiều định nghĩa khác nhau về số nguyên tố, sau đây tôi nêu một định nghĩa về số nguyên tố đơn giản và dễ hiểu nhất.

Định nghĩa 1.1. Số nguyên tố là số nguyên dương lớn hơn 1, chỉ chia hết cho 1 và chính nó. Số nguyên dương khác 1 và không là số nguyên tố thì được gọi là hợp số.
Kí hiệu $\mathbb{P}$ là tập các số nguyên tố.

1.1.2 Một vài tính chất về số nguyên tố

Tính chất 1.1. Ước tự nhiên khác 1 nhỏ nhất của một số tự nhiên là một số nguyên tố.
Chứng minh. Cho số $a \in N$, cho d là ước nhỏ nhất của a với $d \neq 1$. Nếu d không nguyên tố thì $d = d_1.d_2$, trong đó $1 < d_1, d_2 < d$. suy ra d_1 là ước thực sự của a, mà $d_1 < d$ điều này mâu thuẫn với sự nhỏ nhất của d. Suy ra điều phải chứng minh. □

Tính chất 1.2. Cho p là một số nguyên tố, và $a \in N$, $a \neq 0$ khi đó

$$(a, p) = p \Leftrightarrow p \mid a,$$

$$(a,p)=1 \Leftrightarrow p \nmid a.$$

Tính chất 1.3. Nếu tích của nhiều số chia hết cho số nguyên tố p thì có ít nhất một thừa số chia hết cho p.

Tính chất 1.4. Số 2 là số nguyên tố nhỏ nhất và là số nguyên tố chẵn duy nhất.

Tính chất 1.5. Nếu n là hợp số thì n có ít nhất một ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{n}$.
Chứng minh. Giả sử n là hợp số $n = a.b$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $1 < a \leq b < n$, ta có hoặc $a \leq \sqrt{n}$ hoặc $b \leq \sqrt{n}$. Giả sử $a \leq \sqrt{n}$, vì a có ước nguyên tố, giả sử đó là p nên p cũng là ước của n và $p \leq \sqrt{n}$.
Vậy n có ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{n}$. □

Hệ quả 1.1. Nếu số tự nhiên $a > 1$ không có ước nguyên tố nào trong nửa khoảng $(1, [\sqrt{a}]]$ thì a là số nguyên tố.

1.2 Một số định lý cơ bản của lý thuyết số

1.2.1 Một vài định nghĩa và kí hiệu

⋆ **Một số định nghĩa**

Định nghĩa 1.2. Định nghĩa hàm *Chebyshev* $\vartheta(x)$ như sau:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} lnp, \qquad x \in \mathbb{R}, x > 1.$$

Ví dụ 1.1. $\vartheta(10) = ln2 + ln3 + ln5 + ln7$.

Định nghĩa 1.3. Định nghĩa hàm $\pi(x)$ như sau:
Hàm $\pi(x)$, với x là số thực dương, số các số nguyên tố không vượt quá x.

Ví dụ 1.2. $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$.

Định nghĩa 1.4. Một hệ thặng dư đầy đủ *modulo m* là một tập hợp các số nguyên sao cho mỗi số nguyên tùy ý đều đồng dư *modulo m* với đúng một số của tập hợp.

Ví dụ 1.3. Tập hợp các số $0, 1, ..., m-1$ là một hệ thặng dư đầy đủ *modulo m*. Hệ này gọi là hệ không âm bé nhất *modulo m*.

Định nghĩa 1.5. Giả sử m là một số nguyên dương. *Phi hàm Euler* được định nghĩa là số các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m.
Kí hiệu *Phi hàm Euler* qua $\varphi(m)$.

Ví dụ 1.4. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(5) = 4$.

Định nghĩa 1.6. Một hệ thặng dư thu gọn *modulo* m là một tập hợp gồm $\varphi(m)$ số nguyên sao cho mỗi phần tử của tập hợp đều nguyên tố cùng nhau với m, và không có hai phần tử khác nhau nào đồng dư *modulo* m.

Ví dụ 1.5. Tập hợp $1, 3, 5, 7$ là một hệ thặng dư thu gọn *modulo* 8. Tập hợp $-3, -1, 1, 3$ cũng vậy.
$\star$ **Một số kí hiệu**
Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định trên miền $D \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$, $\forall x \in D$. Ta đưa vào các kí hiệu sau đây.
$*f(x) = O(g(x))$, $x \to w$, có nghĩa là $\exists A \in \mathbb{R}, A > 0 : \mid f(x) \mid < Ag(x)$, $x \to w$.
$*$ $f(x) = o(g(x)), x \to w$, có nghĩa là $\lim\limits_{x \to w} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
$*$ $f(x) \sim g(x), x \to w$, có nghĩa là $\lim\limits_{x \to w} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, hay $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \to w$.
$*$ $f(x) = O(1)$ nghĩa là tồn tại $C : \mid f(x) \mid < C$, hay hàm $f(x)$ bị chặn.
Ví dụ:
Khi $x \to +\infty$ ta có:

$$\begin{aligned} 10x &= O(x); \qquad & sinx &= O(1) \\ x &= o(x^2); \qquad & x + 1 &\sim x \end{aligned}$$

Khi $x \to 0$ ta có:

$$\begin{aligned} &x^2 = o(x); \qquad & 1 + x \sim 1 \\ &sinx \sim x. \end{aligned}$$

1.2.2 Các định lý cơ bản của lý thuyết số

Định lý 1.1 (Định lý Cơ bản của Số học)**.** *Mọi số nguyên dương $n > 1$ đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tích các số nguyên tố, trong đó các thừa số nguyên tố được viết theo thứ tự không giảm.*
Chứng minh. Để chứng minh định lý, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 1.1. Giả sử a, b, c là các số nguyên dương, đồng thời $(a, b) = 1$, $a \mid bc$. Khi đó $a \mid c$.
Chứng minh. Vì $(a, b) = 1$ nên tồn tại các số nguyên x, y sao cho $ax + by = 1$. Nhân 2 vế của phương trình này với c, ta có $acx + bcy = c$. Ta thấy $a \mid (acx + bcy)$, vì đó là tổ hợp tuyến tính của a và bc. Do đó $a \mid c$. □

Hệ quả 1.2. Nếu $p \mid a_1a_2...a_n$, trong đó p là số nguyên tố và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên, thì tồn tại i, $1 \leq i \leq n$ sao cho $p \mid a_i$.
Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp. Trường hợp $n = 1$ là hiển nhiên. Giả sử mệnh đề đúng với n. Xét tích $n + 1$ số nguyên , $a_1...a_{n+1}$ và giả sử $p \mid a_1...a_{n+1}$. Khi đó $p \mid (a_1...a_n)a_{n+1}$, nên theo Bổ đề 1.1, $p \mid a_1...a_n$ hoặc $p \mid a_{n+1}$. Nếu $p \mid a_1...a_n$ theo giả thiết quy nạp thì tồn tại i, $1 \leq i \leq n$ sao cho $p \mid a_i$. Do đó $p \mid a_i$ với i nào đó, $1 \leq i \leq n + 1$ □

Chứng minh định lý. Trước hết ta chứng tỏ rằng mọi số nguyên dương $n > 1$ đều có thể viết dưới dạng tích các thừa số nguyên tố, ít nhất là bằng một cách. Giả sử ngược lại, tồn tại các số nguyên dương không có tính chất trên. Gọi n là số bé nhất trong các số đó. Nếu n là số nguyên tố thì hiển nhiên n biểu diễn được dưới dạng tích các số nguyên tố (ở đây tích chỉ gồm một phần tử). Như vậy, n là hợp số. Đặt $n = a.b$, với $1 < a < n$ và $1 < b < n$. Nhưng a và b nhỏ hơn n nên chúng phải là tích các số nguyên tố, và do đó, n cũng là tích các số nguyên tố. Mâu thuẫn này chứng minh rằng số nguyên tùy ý biểu diễn được dưới dạng tích các số nguyên tố.

Ta chứng minh biểu diễn nói trên là duy nhất. Giả sử tồn tại số nguyên dương có hơn một cách biểu diễn. Gọi n là số nguyên dương nhỏ nhất trong các số đó, và n có hai cách biểu diễn.

$$n = p_1p_2...p_s = q_1q_2...q_t,$$

trong đó $p_1, p_2, ..., p_s$ và $q_1, q_2, ..., q_t$ đều là các số nguyên tố, và $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_s$ và $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_t$. Trước tiên ta sẽ chỉ ra rằng $p_1 = q_1$. Giả sử $p_1 \neq q_1$. Không mất tính tổng quát, có thể giả thiết $p_1 < q_1$. Như vậy, $p_1 < q_i$ với mọi $i = 1, 2, 3, ..., t$ (vì các số nguyên tố trong mỗi biểu diễn được xếp theo thứ tự không giảm). Khi đó, $p_1 \nmid q_i$ với mọi i. Theo Hệ quả 1.2, $p_1 \nmid q_1...q_t = n$: vô lý. Vậy $p_1 = q_1$ và $n \vdots p_1 = p_2p_3...p_s = q_2q_3...q_t$. Vì $n \vdots p_1$ là số nguyên dương nhỏ hơn n, mà n là số nguyên dương nhỏ nhất có quá một biểu diễn, nên $n \vdots p_1$ chỉ có thể biểu diễn dạng tích các số nguyên tố theo một cách duy nhất. Như vậy, $s = t$ và $q_i = p_i$ với mọi i. Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 1.2 (Định lý Euclid). *Tồn tại vô hạn số nguyên tố.*

Chứng minh.
Cách 1.
Xét số $Q_n = n! + 1$, với $n \geq 1$. Khi đó Q_n có ít nhất một ước nguyên tố, kí hiệu là q_n. Nếu $q_n \leq n$ thì $q_n \mid n!$ và do đó $q_n \mid (Q_n - n!) = 1$ suy ra mâu thuẫn. Như vậy với mọi số nguyên dương n đều có số nguyên tố lớn hơn n, nên tập các số nguyên tố là vô hạn. □
Cách 2 (Chứng minh của Euclid).
Giả sử tập hợp số nguyên tố $2, 3, 5..., p$ là hữu hạn. Ta xét số n là tích của các số nguyên tố cộng thêm 1,

$$n = 2.3.5...p + 1.$$

Rõ ràng n sẽ có một ước nguyên tố q nào đó. Nhưng vì n không chia hết cho số nguyên tố nào ở dãy trên nên ước số nguyên tố q của n sẽ không nằm trong dãy số trên. Vậy suy ra mâu thuân với giả thiết. □

Định lý 1.3. Với mọi số nguyên dương n, tồn tại ít nhất n số liên tiếp, mà mỗi một trong chúng đều là hợp số.
Chứng minh.
Xét dãy các số nguyên liên tiếp

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, ..., (n+1)! + (n+1).$$

Khi $2 \leq j \leq (n+1)$, $j \mid (n+1)! + j$. Vậy các số trong dãy nói trên đều lá hợp số. □

Định lý 1.4. Chuỗi số $\sum\limits_{p \in \mathbb{P}} \dfrac{1}{p}$ là chuỗi số phân kì.

Chứng minh. Xét

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} &= \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{{p_i}^2} + ...\right) \\ &= \sum \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Trong tổng trên ta cho n chạy qua tất cả các số tự nhiên là tích của tất cả các thừa số nguyên tố, $p_1, p_2, ..., p_n$, kể cả 1.
Ta có

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum \frac{1}{n}.$$