ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ PHƯƠNG LAN

ĐA THỨC VỚI CÁC HỆ SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ PHƯƠNG LAN

ĐA THỨC VỚI CÁC HỆ SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên, 2014

MỤC LỤC

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ PHƯƠNG LAN

ĐA THỨC VỚI CÁC HỆ SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ PHƯƠNG LAN

ĐA THỨC VỚI CÁC HỆ SỐ NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên, 2014

MỞ ĐẦU

Toán học là một ngành khoa học hấp dẫn khiến hàng triệu con người trên thế giới đam mê. Đại số là một trong các lĩnh vực nghiên cứu của toán học, trong đó đa thức là một trong những vấn đề quan trọng của đại số. Đa thức nói chung và đa thức với hệ số nguyên nói riêng có nhiều tính chất hay, đẹp và có nhiều ứng dụng.

Đa thức với hệ số nguyên là lớp đa thức có nhiều tính chất đặc thù mà chỉ riêng lớp đa thức này mới có. Thí dụ, phân tích đa thức với hệ số nguyên thành các đa thức thừa số với hệ số là số nguyên, hay tiêu chuẩn để một đa thức với hệ số nguyên là bất khả qui,…là các bài toán khó, liên quan đến nhiều lĩnh vực khác nhau của đại số như lý thuyết đồng dư, đa thức bất khả quy,… và hiện nay vẫn được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Mặt khác, các bài tập cụ thể về đa thức với hệ số nguyên thường là các bài toán thú vị, phát biểu đơn giản, chứng minh đẹp đẽ và sơ cấp, nhiều khi chỉ cần đến những kiến thức toán phổ thông nâng cao nhưng cần các suy luận độc đáo. Chính vì vậy mà dạng toán này thường được ra trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế.

Luận văn *Đa thức với các hệ số nguyên* có mục đích trình bày tổng quan về một số kết quả đã biết về đa thức với hệ số nguyên và ứng dụng trong giải toán.

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn gồm hai chương

Chương 1 trình bày tổng quan về đa thức với hệ số nguyên.

Chương này trình bày đa thức với hệ số nguyên: đa thức và nghiệm của đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, đa thức bất khả quy và các tiêu chuẩn bất khả quy của đa thức, đa thức với hệ số nguyên và đồng dư thức,...

Chương 2 trình bày các dạng toán về đa thức với hệ số nguyên và các bài toán về đa thức với hệ số nguyên trong các đề thi vô địch quốc gia , quốc tế.

Luận văn trình bày các kiến thức cơ bản về đa thức với hệ số nguyên và tập hợp một lượng không nhỏ (khoảng 50 bài) các bài toán thi vô địch quốc gia và quốc tế về đa thức với hệ số nguyên. Tuy nhiên, luận văn chắc chắn còn nhiều thiếu sót, nên rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp và độc giả quan tâm để tác giả hoàn thiện luận văn tốt hơn.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình và nghiêm túc của PGS TS Tạ Duy Phượng. Xin được bày tỏ lòng biết ơn tới người Thày, đã không chỉ hướng dẫn khoa học, mà còn động viên và khích lệ tác giả say mê học tập và nghiên cứu.

Xin bày tỏ lòng biết ơn Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã trang bị cho tôi những kiến thức toán học cơ bản trong thời gian học Cao học.

Xin được cám ơn Trường Cao đẳng Công Nghiệp và Xây Dựng, Quảng Ninh, nơi tôi công tác, đã tạo mọi điều kiện để tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập.

Xin được cám ơn Gia đình, bạn bè đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học Cao học và viết Luận văn.

Quảng Ninh, ngày 01.5.2014

Mai Thị Phương Lan

Chương 1

ĐA THỨC VỚI HỆ SỐ NGUYÊN

1.1 Đa thức

Trong luận văn này ta xét K là vành các số thực $\mathbb{R}$ hoặc K là vành các số nguyên $\mathbb{Z}$. Từ nay về sau, khi nói vành K, ta hiểu K là vành số thực hoặc vành các số nguyên. Khi sử dụng vành số thực $\mathbb{R}$ hoặc vành số nguyên $\mathbb{Z}$, ta sẽ nói cụ thể.

Định nghĩa 1.1.1 *Đa thức* bậc n ($\deg P = n$) trên vành K là biểu thức dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

với $a_i \in K, a_n \neq 0$ được gọi là *hệ số cao nhất*, a_0 được gọi là *hệ số tự do*.

Định nghĩa 1.1.2 *Đa thức với hệ số nguyên* là đa thức có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

trong đó $a_i \in \mathbb{Z}$ là các hệ số nguyên.

Tập tất cả các đa thức với hệ số nguyên là một vành, ký hiệu là $\mathbb{Z}[x]$.

Giá trị của đa thức $P(x)$ tại x_0 là $P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0$.

Nghiệm của đa thức là số $\overline{x}$ sao cho $P(\overline{x}) = 0$.

Nhận xét 1.1.1 Tổng các hệ số của $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{Z}$ là $P(1)$, tức là $P(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$. Và $P(0) = a_0$ là hệ số tự do.

Đa thức mônic Nếu hệ số a_n ứng với số hạng cao nhất x^n của $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ bằng 1 thì ta gọi đa thức đó là *đa thức mônic* (monic polynomial).

Định lý 1.1.1 (Euclid) *Cho đa thức* $P(x)$ *bậc* n *và đa thức* $Q(x)$ *bậc* m $(m<n)$ *với các hệ số thực. Khi ấy tồn tại các đa thức duy nhất* $S(x)$ *và* $R(x)$ *sao cho*

$$P(x)=Q(x).S(x)+R(x), \tag{1.1}$$

trong đó $R(x)$ *có bậc* r *nhỏ hơn bậc của* $Q(x)$*, tức là* $r<m.$

Chứng minh

Sự tồn tại. Sự tồn tại của $S(x)$ và $R(x)$ thì suy ra từ thuật toán dưới đây.

Thực toán chia đa thức $P(x)$ cho $Q(x)$ là thuật toán tìm các đa thức $S(x)$ và $R(x)$ sao cho ta có biểu diễn (1.1). Đa thức $S(x)$ được gọi là *đa thức thương*, đa thức $R(x)$ được gọi là *đa thức dư* của $P(x)$ khi chia cho $Q(x)$.

Trường hợp 1 $\deg P<\deg Q.$ Đặt $S(x)=0, R(x)=P(x).$ Hiển nhiên ta có phân tích (1.1).

Trường hợp 2 $\deg P\geq \deg Q.$ Giả sử

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0,$$

$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0, b_m\neq 0 \text{ và } n\geq m.$$

Ký hiệu $H(x)=\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}.$ Khi ấy đa thức

$$\begin{aligned}
&P_1(x)=P(x)-Q(x)H(x)\\
&=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0\right)-\left(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0\right)\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\\
&=a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0-\left(b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0\right)\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}
\end{aligned}$$

có bậc không vượt quá $n-1,$ thực sự nhỏ hơn bậc của $P(x),$ hoặc $P_1(x)=0.$

Nếu $P_1(x)=0$ thì đa thức dư $R(x)=0$ và đa thức thương $Q(x)=H(x).$

Nếu $P_1(x)\neq 0$ ta tiếp tục làm tương tự với $P_1(x),$ ta được $P_2(x),...$

Dãy đa thức $P_1(x), P_2(x)...$ có bậc thật sự giảm dần.

Cuối cùng ta đi đến một đa thức có bậc thực sự nhỏ hơn bậc của $Q(x)$.

Đa thức đó chính là đa thức dư $R(x)$.

Nếu một đa thức của dãy bằng 0 thì đa thức dư $R(x)=0$.

Để thấy rõ hơn, ta viết các bước mà ta đã thực hiện để được dãy $P_1(x), P_2(x),...$

$$P_1(x)=P(x)-Q(x)H(x),$$

$$P_2(x)=P_1(x)-Q(x)H_1(x),$$

....

$$P_k(x)=P_{k-1}(x)-Q(x)H_{k-1}(x),$$

với $P_k(x)=0$ hoặc $\deg P_k < \deg Q$.

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta được

$$P(x)=Q(x)\left(H(x)+H_1(x)+...+H_{k-1}(x)\right)+P_k(x).$$

Từ đây suy ra

$$S(x)=H(x)+H_1(x)+....+H_{k-1}(x),\ R(x)=P_k(x).$$

Tính duy nhất Giả sử

$$P(x)\equiv Q(x).S(x)+R(x)\equiv Q(x).S_1(x)+R_1(x),$$

với $\deg R_1 < \deg Q$ nếu $R_1(x)\neq 0$ (không đồng nhất bằng 0). Suy ra

$$0\equiv Q(x)\left(S(x)-S_1(x)\right)+R(x)-R_1(x). \tag{1.2}$$

Nếu $R(x)\equiv R_1(x)$ thì ta có $Q(x)\left(S(x)-S_1(x)\right)\equiv 0$.

Vì $Q(x)$ không đồng nhất bằng 0 nên suy ra $S(x)-S_1(x)\equiv 0,$ tức là $S(x)\equiv S_1(x)$.

Giả sử $R(x)\neq R_1(x)$, từ (1.2) suy ra

$$R(x)-R_1(x)\equiv -Q(x)\left(S(x)-S_1(x)\right).$$

Vậy