BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

PHẠM GIA HƯNG

CÁC PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH TRONG BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

ĐÀ LẠT – 2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

PHẠM GIA HƯNG

CÁC PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH TRONG BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: **Toán Giải tích**
Mã số: **62.46.01.01**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

1. **GS.TSKH. Lê Dũng Mưu - Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam**
2. **TS. Lê Minh Lưu - Trường Đại học Đà Lạt**

ĐÀ LẠT – 2014

Lời cam đoan

Các kết quả trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của tôi được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu; TS. Lê Minh Lưu đã có những ý kiến đóng góp sũa chữa luận án. Các kết quả trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong các công trình của người khác.

Tôi xin chịu trách nhiệm với những lời cam đoan của mình.

Tác giả

Phạm Gia Hưng

Lời cám ơn

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Đà Lạt và Viện Toán học thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu; TS. Lê Minh Lưu đã có những ý kiến đóng góp giúp tác giả sữa chữa luận án. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các Thầy.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, thông qua các bài giảng, hội nghị và seminar, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ cũng như có được những ý kiến đóng góp quý báu của các Thầy Cô ở Trường Đại học Đà Lạt và Viện Toán học. Tác giả xin chân thành cám ơn.

Tác giả xin trân trọng cám ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Đà Lạt, Phòng Đào tạo Đại học và Sau đại học, Khoa Sau đại học - Trường Đại học Đà Lạt; Ban lãnh đạo của Viện Toán học; Ban lãnh đạo Trường Đại học Nha Trang, Khoa Khoa học cơ bản, Khoa Công nghệ thông tin - Trường Đại học Nha Trang; đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Xin được cám ơn anh chị em cùng nhóm nghiên cứu, bạn bè và đồng nghiệp gần xa đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận án.

Tác giả xin kính tặng những người thân yêu trong gia đình của mình niềm vinh hạnh to lớn này.

Mục lục

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}$	tập số nguyên dương
$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\mathbb{R}^n_+$	góc không âm của $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{H}$	không gian Hilbert thực
X^*	không gian đối ngẫu của không gian X
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$	chuẩn của vectơ x
I	ánh xạ đồng nhất
f^{-1}	ánh xạ ngược của ánh xạ f
$f^{-1}(V)$	nghịch ảnh của tập V qua ánh xạ f
$domf$	miền hữu hiệu của ánh xạ f
$rgef$	miền ảnh của ánh xạ f
$gphf$	đồ thị của ánh xạ f
$epif$	trên đồ thị của ánh xạ f
$f'(x)$ hay $\nabla f(x)$	đạo hàm của f tại điểm x
$f'(x, d)$	đạo hàm theo phương d của f tại điểm x
$\partial f(x)$	dưới vi phân của f tại điểm x
$\min\{f(x) : x \in D\}$	giá trị cực tiểu của f trên tập D
$\max\{f(x) : x \in D\}$	giá trị cực đại của f trên tập D
$argmin\{f(x) : x \in D\}$	tập các điểm cực tiểu của f trên tập D
$argmax\{f(x) : x \in D\}$	tập các điểm cực đại của f trên tập D
clD	bao đóng của tập D

$intD$	phần trong của tập D
riD	phần trong tương đối của tập D
$d_D(x)$	khoảng cách từ điểm x đến tập D
$p_D(x)$	hình chiếu của điểm x trên tập D
$N_D(x)$	nón pháp tuyến của tập D tại điểm x
$diamD := \sup_{x,y \in D} \|x - y\|$	đường kính của của tập D
$\overline{B}(a, r)$	quả cầu đóng tâm a bán kính r
$B(a, r)$	quả cầu mở tâm a bán kính r
$S(a, r)$	mặt cầu tâm a bán kính r
$x^k \to x$	dãy x^k hội tụ mạnh tới điểm x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy x^k hội tụ yếu tới điểm x
$\overline{\lim} := \limsup$	giới hạn trên
$\underline{\lim} := \liminf$	giới hạn dưới
$E(K, f)$	bài toán cân bằng
$NE(K, f)$	bài toán cân bằng Nash
$VI(K, F)$	bài toán bất đẳng thức biến phân (đơn trị)
$MVI(K, F)$	bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị
$O(K, f)$	bài toán tối ưu
(BO)	bài toán tối ưu hai cấp
P^d	bài toán đối ngẫu của bài toán P
SP	tập nghiệm của bài toán P
SP_δ	tập $\delta -$ nghiệm của bài toán P

Mở đầu

Cho $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thực, $K \subseteq \mathcal{H}$ là tập lồi đóng khác rỗng và $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng, tức là f thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in K$. Xét bài toán

$$E(K, f): \text{ Tìm } x \in K \text{ sao cho } f(x, y) \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Bài toán này lần đầu tiên được đưa ra vào năm 1955 bởi H. Nikaido, K. Isoda [44] nhằm tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash [1] trong trò chơi không hợp tác và vào năm 1972, nó được xét đến dưới dạng một bất đẳng thức minimax bởi tác giả Ky Fan [2] [20], người đã có nhiều đóng góp quan trọng cho bài toán nên bài toán được gọi là Bất đẳng thức Ky Fan (*Ky Fan Inequality*).

Bài toán $E(K, f)$ thường được sử dụng để thiết lập điểm cân bằng trong Lý thuyết trò chơi (*Games Theory*), bởi thế nó còn có tên gọi khác là Bài toán cân bằng (*Equilibrium Problem*) theo cách gọi của các tác giả L.D. Muu, W. Oettli [40] năm 1992 và E. Blum,W. Oettli [10] năm 1994.

Bài toán cân bằng (viết tắt là BTCB) khá đơn giản về mặt hình thức nhưng nó bao hàm được nhiều lớp bài toán quan trọng thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động Kakutani, điểm yên ngựa, cân bằng Nash, v.v... [8, 23, 40]; nó hợp nhất các bài toán này theo một phương pháp nghiên cứu chung rất tiện lợi. Nhiều kết quả của các bài toán nói trên có thể mở rộng cho BTCB tổng quát với những điều chỉnh phù hợp và do vậy thu được nhiều ứng dụng rộng lớn [10, 26, 27, 36, 37, 49].

[1] John Forbes Nash Jr. (13/06/1928) là một nhà toán học người Mỹ chuyên nghiên cứu về lý thuyết trò chơi và hình học vi phân. Năm 1994, ông nhận được giải thưởng Nobel về kinh tế cùng với hai nhà nghiên cứu lý thuyết trò chơi khác là Reinhard Selten và John Harsanyi.

[2] Ky Fan (19/09/1914 – 22/03/2010) là nhà toán học Mỹ gốc Hoa, giáo sư danh dự trường Đại học California, Santa Barbara.

Các nhà nghiên cứu cũng đã chỉ ra rằng, nhiều bài toán thực tế như tối ưu, kinh tế và kỹ thuật có thể mô tả được dưới dạng BTCB [8, 41, 42]. Điều đó đã giải thích được vì sao BTCB ngày càng được nhiều người quan tâm.

Các hướng nghiên cứu đang được chú trọng đối với BTCB là: nghiên cứu những vấn đề định tính như sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, tính ổn định [6, 8, 25, 30, 39, 58] và định lượng như phương pháp giải, tính hội tụ [8, 9, 23, 26, 29, 33, 36, 37, 42, 45, 46, 48, 49]; ứng dụng bài toán này vào trong thực tế, đặc biệt vào các mô hình kinh tế [41, 42]. Trong việc nghiên cứu những vấn đề này, các phương pháp giải đóng một vai trò rất quan trọng. Đến nay đã có một số kết quả đạt được cho một số lớp BTCB với các giả thiết lồi và đơn điệu, trong đó chủ yếu sử dụng phương pháp điểm gần kề (*proximal point method*), phương pháp nguyên lý bài toán phụ (*auxiliary subproblem principle method*), phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov (*Tikhonov regularization method*), phương pháp hàm đánh giá (*gap function method*), và đặc biệt là các phương pháp chiếu (*projection methods*).

Bài toán $E(K, f)$, khi hàm f không có tính đơn điệu mạnh, nói chung là bài toán đặt không chỉnh (*ill-posed problem*) theo nghĩa bài toán không có duy nhất nghiệm hoặc nghiệm của nó không ổn định theo dữ kiện ban đầu, tức là một thay đổi nhỏ của các dữ liệu có thể dẫn đến sự sai khác rất lớn của nghiệm, thậm chí làm cho bài toán trở nên vô nghiệm hoặc vô định. Nhiều vấn đề khoa học, công nghệ, kinh tế, sinh thái, v.v... gặp phải các bài toán thuộc loại này.

Do các số liệu thường được thu thập bằng thực nghiệm và sau đó lại được xử lý trên máy tính nên chúng không tránh khỏi có sai số. Chính vì thế, ta cần phải có những phương pháp giải ổn định các bài toán đặt không chỉnh sao cho khi sai số của dữ liệu càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát. Hiệu chỉnh là một trong những kỹ thuật quan trọng tạo nên các phương pháp giải ổn định; nó thường được dùng để xử lý những bài toán đặt không chỉnh trong toán học ứng dụng như tối ưu lồi, bất đẳng thức biến phân, v.v... Các phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề là những phương pháp rất hay được sử dụng. Ý tưởng chính của các phương pháp này là: xây dựng các bài toán hiệu chỉnh bằng cách cộng vào toán tử của bài toán gốc một toán tử đơn điệu mạnh phụ thuộc vào tham số