

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ CÚC

HỆ NHÂN TỬ
TRONG NHÓM PHẠM TRỪ PHÂN BẬC

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HUẾ - 2014

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ CÚC

**HỆ NHÂN TỬ
TRONG NHÓM PHẠM TRỪ PHÂN BẬC**

Chuyên ngành: *Đại số và lý thuyết số*

Mã số: *62. 46. 05. 01*

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

- 1. PGS. TS. Nguyễn Tiến Quang**
- 2. GS. TS. Lê Văn Thuyết**

HUẾ, 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi được viết chung với các đồng tác giả. Những kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các số liệu, kết quả được trình bày trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Phạm Thị Cúc

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Tiến Quang và GS. TS. Lê Văn Thuyết. Lời đầu tiên, em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến các Thầy. Các Thầy không chỉ truyền cho em niềm đam mê nghiên cứu khoa học, tận tình hướng dẫn và giúp đỡ em về mọi mặt, mà còn dành cho em sự cổ vũ và động viên trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu của mình.

Tôi xin trân trọng cảm ơn các thầy cô trong Khoa Toán, Phòng Sau đại học - Trường Đại học sư phạm - Đại học Huế, Ban đào tạo sau đại học - Đại học Huế và các thầy cô trong Bộ môn Đại số, Khoa Khoa học tự nhiên - Trường Đại học Hồng Đức - Thanh Hóa đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi học tập, nghiên cứu và hoàn thành chương trình nghiên cứu của mình.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến Thạc sỹ Nguyễn Thu Thủy vì những sự giúp đỡ chân thành.

Cuối cùng, tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình tôi vì những sự đồng cảm, động viên và chia sẻ những khó khăn trong suốt thời gian tôi làm nghiên cứu sinh và hoàn thành luận án này.

Phạm Thị Cúc

Mục lục

1 Một số kiến thức chuẩn bị	16
1.1 Nhóm phạm trù (bên) phân bậc	16
1.1.1 Nhóm phạm trù	16
1.1.2 Nhóm phạm trù thu gọn và các tương đương chính tắc	17
1.1.3 Nhóm phạm trù phân bậc	18
1.1.4 Nhóm phạm trù bên phân bậc	19
1.1.5 Hàm tử monoidal, tương đương tự nhiên monoidal	19
1.2 Ann-phạm trù	20
1.2.1 Ann-phạm trù	20
1.2.2 Ann-hàm tử	22
1.2.3 Ann-phạm trù thu gọn	22
2 Phân lớp các hàm tử monoidal kiểu (φ, f) và ứng dụng	25
2.1 Phân lớp đối đồng điều các hàm tử monoidal kiểu (φ, f)	25
2.2 Phân lớp các nhóm phạm trù	30
2.3 Phân lớp các nhóm phạm trù bên	34
2.4 Phân lớp các nhóm phạm trù bên phân bậc bởi hệ nhân tử	37
2.5 Áp dụng vào bài toán mở rộng nhóm cổ điển	45
2.5.1 Nhóm phạm trù của một hạt nhân trừu tượng	45
2.5.2 Hàm tử monoidal và bài toán mở rộng nhóm	49
3 Nhóm phạm trù chặt chẽ và mở rộng nhóm kiểu môđun chéo	53
3.1 Nhóm phạm trù liên kết với một môđun chéo	53
3.2 Phân lớp các môđun chéo	55
3.3 Bài toán mở rộng nhóm kiểu môđun chéo: lý thuyết cản trở và định lý phân lớp	58
4 Nhóm phạm trù phân bậc chặt chẽ và mở rộng nhóm đẳng biến kiểu Γ-môđun chéo	65
4.1 Lý thuyết đối đồng điều nhóm đẳng biến của Cegarra	65

4.2	Nhóm phạm trù phân bậc thu gọn và hàm tử monoidal phân bậc kiểu (φ, f)	66
4.2.1	Xây dựng nhóm phạm trù phân bậc thu gọn thông qua phạm trù khung	67
4.2.2	Xây dựng nhóm phạm trù phân bậc thu gọn bằng phương pháp hệ nhân tử	69
4.2.3	Phân lớp các hàm tử monoidal phân bậc kiểu (φ, f)	72
4.3	Γ -môđun chéo và nhóm phạm trù phân bậc liên kết	73
4.4	Phân lớp các Γ -môđun chéo	76
4.5	Bài toán mở rộng nhóm đẳng biến kiểu Γ -môđun chéo: lý thuyết cản trở và định lý phân lớp	81
5	Ann-phạm trù chặt chẽ và mở rộng vành kiểu E-hệ chính qui	88
5.1	Lý thuyết đối đồng điều vành của Mac Lane và Shukla	88
5.2	Song môđun chéo và E-hệ chính qui	91
5.3	Phân lớp các E-hệ chính qui	94
5.4	Mở rộng vành kiểu E-hệ chính qui	99

BẢNG KÝ HIỆU

Ký hiệu	Nghĩa
$\text{Ob}\mathbb{G}$	tập các vật của phạm trù \mathbb{G}
$\text{Mor}\mathbb{G}$	tập các mũi tên của phạm trù \mathbb{G}
$(0, \mathbf{g}, \mathbf{d})$	ràng buộc đơn vị của phép cộng
$(1, \mathbf{l}, \mathbf{r})$	ràng buộc đơn vị (của phép nhân)
$\Pi = \pi_0\mathbb{G}$	tập các lớp vật đẳng cấu của \mathbb{G}
$A = \pi_1\mathbb{G}$	tập các tự đẳng cấu của vật đơn vị I
$S_{\mathbb{G}}$	phạm trù thu gọn của phạm trù \mathbb{G}
$\text{Hom}_{(\varphi, f)}[\mathbb{S}, \mathbb{S}']$	tập các lớp đồng luân các hàm tử kiểu (φ, f) từ \mathbb{S} đến \mathbb{S}'
$(\Pi, A), (\Pi, A, k)$	nhóm phạm trù kiểu (Π, A)
$\int_{\Gamma}(\Pi, A, h)$	nhóm phạm trù Γ -phân bậc kiểu (Π, A)
(F, \tilde{F})	hàm tử monoidal (Γ -phân bậc)
$(F, \check{F}, \tilde{F})$	Ann-hàm tử
$(H, \tilde{H}), (G, \tilde{G})$	các tương đương monoidal chính tắc
$(H_{\Gamma}, \tilde{H}_{\Gamma}), (G_{\Gamma}, \tilde{G}_{\Gamma})$	các tương đương monoidal Γ -phân bậc chính tắc
$(R, M), (R, M, h)$	Ann-phạm trù kiểu (R, M)
$H^i(\Pi, A)$	các nhóm đối đồng điều nhóm
$H_{\Gamma}^i(\Pi, A)$	các nhóm đối đồng điều nhóm đẳng biến
$H_{MacL}^i(R, M)$	các nhóm đối đồng điều vành của Mac Lane
$H_{Shu}^i(R, M)$	các nhóm đối đồng điều vành của Shukla
M_A	vành các song tích của vành A
$\text{Ext}(\Pi, A, \psi)$	tập các lớp tương đương các mở rộng nhóm
$\mathcal{M}, (B, D, d, \theta), B \xrightarrow{d} D$	(Γ) -môđun chéo, E-hệ
$\text{Ext}_{B \rightarrow D}(Q, B, \psi)$	tập các lớp tương đương các mở rộng nhóm kiểu môđun chéo
$\text{Ext}_{B \rightarrow D}^{\Gamma}(Q, B, \psi)$	tập các lớp tương đương các mở rộng nhóm đẳng biến kiểu Γ -môđun chéo

BẢNG THUẬT NGỮ

Thuật ngữ

Ann-phạm trù
Ann-phạm trù chặt chẽ
Ann-phạm trù chính qui
Ann-phạm trù thu gọn
Ann-hàm tử
Ann-hàm tử đơn
Ann-mũi tên
Ann-tương đương
Ann-tương đương chính tắc
cản trở
đính
điều kiện khớp
E-hệ
E-hệ chính qui
hàm tử monoidal
hàm tử monoidal chính qui
hàm tử monoidal đối xứng
hàm tử monoidal phân bậc
hàm tử monoidal phân bậc chính qui
hạt nhân trừu tượng
hệ nhân tử
hệ nhân tử chính qui
giả hàm tử
môđun chéo
môđun chéo đẳng biến
mở rộng nhóm đẳng biến
mở rộng tích chéo
nhóm phạm trù
nhóm phạm trù chặt chẽ
nhóm phạm trù bện
nhóm phạm trù bện phân bậc

Tiếng Anh

Ann-category
strict Ann-category
regular Ann-category
reduced Ann-category
Ann-functor
single Ann-functor
Ann-morphism
Ann-equivalence
canonical Ann-equivalence
obstruction
stick
coherence condition
E-system
regular E-system
monoidal functor
regular monoidal functor
symmetric monoidal functor
graded monoidal functor
regular graded monoidal functor
abstract kernel
factor set
regular factor set
pseudo-functor
crossed module
equivariant crossed module
equivariant group extension
crossed product extension
categorical group
strict categorical group
braided categorical group
graded braided categorical group

nhóm phạm trù phân bậc	graded categorical group
nhóm phạm trù phân bậc chặt chẽ	strict graded categorical group
nhóm phạm trù rời rạc	discrete categorical group
nhóm phạm trù thu gọn	reduced categorical group
phạm trù khung	skeletal category
phạm trù monoidal	monoidal category
phạm trù monoidal đối xứng	symmetric monoidal category
phạm trù Picard	Picard category
phân bậc	graded
ràng buộc	constraint
ràng buộc bện	braided constraint
ràng buộc đơn vị	unit constraint
ràng buộc giao hoán	commutativity constraint
ràng buộc kết hợp	associativity constraint
song môđun chéo	crossed bimodule
song tích	bimultiplication
song tích giao hoán	permutable bimultiplication
sự tương thích	compatibility
tiền dính	pre-stick
tương đương phạm trù	categorical equivalence
tương đương tự nhiên monoidal	monoidal natural equivalence
vật	object

SƠ ĐỒ MỐI LIÊN HỆ GIỮA CÁC KHÁI NIỆM, THUẬT NGỮ

