ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

NGUYỄN THÚY VÂN

MỘT SỐ THUẬT TOÁN NỘI SUY ĐỂ XÁC ĐỊNH CÁC NGUYÊN HÀM SƠ CẤP CỦA HÀM HỮU TỶ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Nguyễn Thúy Vân

MỘT SỐ THUẬT TOÁN NỘI SUY ĐỂ XÁC ĐỊNH CÁC NGUYÊN HÀM SƠ CẤP CỦA HÀM HỮU TỶ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

MỞ ĐẦU

Trong chương trình Toán Giải tích, ta đã biết rằng: *"Những hàm số* $e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \sqrt{1+x^4}, \ldots$ *đều là hàm số sơ cấp có nguyên hàm, nhưng nguyên hàm của nó không thể biểu diễn được dưới dạng hàm số sơ cấp."* Do đó hai câu hỏi tự nhiên được đặt ra là *"(A): Những hàm số nào có nguyên hàm có thể biểu diễn được dưới dạng hàm số sơ cấp?"* và *"(B): Nếu một hàm số có nguyên hàm là hàm sơ cấp thì làm cách nào để tìm được nguyên hàm sơ cấp đó?"*

Hiện nay chúng ta đã biết có rất nhiều cách để tính các nguyên hàm của một hàm số như sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản, phép đổi biến số, phép lấy nguyên hàm (tích phân) từng phần .... Tuy nhiên, trong một số trường hợp đối với những hàm số dạng phức tạp thì rất khó nhận biết nên áp dụng phương pháp nào để tính nguyên hàm của nó. Thông thường, người ta tìm các thuật toán để đưa hàm số đã cho về các hàm số có dạng đơn giản hơn nhờ các phép toán nội suy cổ điển đã biết.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu và trình bày các thuật toán để xác định nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỷ (tử số và mẫu số là những đa thức đại số), và tìm hiểu tiêu chuẩn để nhận biết các hàm số quen thuộc như $e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \sqrt{1+x^4}$ và một số dạng hàm số sơ cấp khác không có nguyên hàm sơ cấp.

Nội dung của luận văn gồm 3 chương:

**Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị.* Chương này trình bày định nghĩa và tính chất của hàm số sơ cấp, các định lí về sự tồn tại nguyên hàm của hàm số sơ cấp cùng với định lí Liouville và các công thức nội suy Lagrange và Hermite.

**Chương 2. Một số phương pháp tìm nguyên hàm của hàm hữu tỷ.* Nội dung của chương này dành để trình bày một số thuật toán để tính nguyên hàm của một hàm hữu tỷ tổng quát bằng việc áp dụng nội suy Lagrange, nội suy Hermite và phương pháp Horowitz là một cách cải biên phương pháp nội suy Hermite trong trường hợp cụ thể. Tiếp theo trình bày các ví dụ minh họa.

**Chương 3. Một số ví dụ áp dụng.* Chương này đưa ra một số lớp hàm số tổng quát có thể tính nguyên hàm hoặc chứng minh không tồn tại nguyên hàm sơ cấp, cách tính tích phân của một số hàm số ngược. . . .

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến NGND. GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, người Thầy đã giúp cho tác giả có niềm say mê nghiên cứu Toán học, đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán Ứng Dụng, các thầy cô đã tham gia giảng dạy cho lớp Cao học Toán niên khoá 2012 - 2014, các thầy cô và các anh chị đồng nghiệp của lớp Toán K6D trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và góp ý để luận văn được hoàn chỉnh.

Tác giả xin chân thành cảm ơn UBND tỉnh và Sở GDĐT Phú Thọ, Ban giám hiệu trường THPT Hương Cần, Huyện Thanh Sơn, các bạn bè đồng nghiệp và gia đình đã động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tác giả trong thời gian học tập và nghiên cứu.

Hệ thống các ký hiệu sử dụng trong luận văn

- deg $f(x)$ là bậc của đa thức $f(x)$.
- $F_0(x)$ là nguyên hàm (cấp 1) của đa thức $f(x)$ ứng với hằng số $c = 0$, tức là $F_0(x)$ thoả mãn $F_0(0) = 0$.
- $F_c(x)$ là nguyên hàm (cấp 1) của đa thức $f(x)$ ứng với hằng số c, tức là $F_c(x) = F_0(x) + c$ với $c \in \mathbb{R}$.
- $F_{0,k}(x)$ là nguyên hàm cấp k của đa thức $f(x)$ ứng với hằng số $c = 0$, tức là $F_{0,k}(x)$ thoả mãn $F_{0,k}(0) = 0$.
- $F_{c,k}(x)$ là nguyên hàm cấp k của đa thức $f(x)$ ứng với hằng số c, tức là $F_{c,k}(x) = F_{0,k}(x) + c$ với $c \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{H}_n$ là tập hợp đa thức với hệ số thực $P_n(x)$ bậc n $(n > 0)$ với hệ số tự do bằng 1 $(P_n(0) = 1)$ và có các nghiệm đều thực.
- $M_k(f)$ là tập hợp các nguyên hàm cấp k của đa thức $f(x)$.
- $\mathbb{R}[x]$ là tập hợp đa thức với hệ số thực.

-sign a là dấu của số thực a, tức là

$$\text{sign } a := \begin{cases} + & \text{khi } a > 0 \\ 0 & \text{khi } a = 0 \\ - & \text{khi } a < 0. \end{cases}$$

CHƯƠNG 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1. Định nghĩa và các tính chất của hàm sơ cấp

Chúng ta sẽ bắt đầu mục này với định nghĩa về hàm số đại số.

Định nghĩa 1.1 ([5]). Hàm số $f(x)$ được gọi là một *hàm số đại số tường minh (hiển)* của x nếu $f(x)$ là tổ hợp hữu hạn của các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) và hữu hạn phép lấy căn thức của các phần tử là các đa thức.

Chẳng hạn, các hàm số

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - i\sqrt{3}}{x\sqrt{2} - e}\right)^{\frac{3}{5}}$,

$f(x) = \dfrac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt[3]{(1-x)}}{\sqrt[4]{(1+x)^2} + \sqrt[5]{(1-x)^3}}$, ,... là các hàm đại số tường minh.

Nếu y là một hàm số đại số tường minh của x thì y luôn thỏa mãn một phương trình dạng $y^m + R_1 y^{m-1} + \cdots + R_m = 0$, trong đó các R_i là những hàm số hữu tỉ.

Định nghĩa 1.2 ([5]). Hàm số y được gọi là một *hàm số đại số* của x nếu y thỏa mãn phương trình $y^m + R_1 y^{m-1} + \cdots + R_m = 0$ với các R_i là những hàm số hữu tỉ của x.

Định nghĩa 1.3 ([1]-[5]). Một hàm số *sơ cấp* là một hàm số được cho bởi một trong các dạng sau:

1. Là đa thức đại số,

2. Là hàm số hữu tỉ,

3. Là hàm số mũ e^x,

4. Là hàm số logarit $\log_a x$,

5. Là hàm số được xác định bởi tổ hợp hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, lấy căn, luỹ thừa, hàm ngược và hàm hợp của các hàm số thuộc các lớp hàm liệt kê ở trên.

Chẳng hạn, hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x^5 - 3x - 2} + \sqrt{x^2+1} + \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} - \ln(3x - e^x)$ là hàm số sơ cấp.

Tiếp sau đây là định nghĩa về hàm số sơ cấp theo ngôn ngữ mở rộng trường.

Định nghĩa 1.4 ([4])**.** *Hàm số sơ cấp* là một hàm số thuộc một mở rộng trường sơ cấp của trường các hàm hữu tỉ $\mathbb{C}(x)$.

Ví dụ 1.1. Hàm số $f(x) = e^{ix} - i\ln(x + e^{ix})$ là một hàm số sơ cấp vì $f(x) \in \mathbb{C}(x)(e^{ix})(\ln(x+e^{ix}))$ và $\mathbb{C}(x)(e^{ix})(\ln(x+e^{ix}))$ là một mở rộng sơ cấp của $\mathbb{C}(x)$.

Từ định nghĩa hàm số sơ cấp theo ngôn ngữ mở rộng trường, ta có một kết luận quan trọng như sau.

Mệnh đề 1.1 ([4])**.** *Nếu f, g là hàm số sơ cấp thì hàm hợp của $g(f)$ cũng là hàm số sơ cấp.*

Chứng minh.

Vì f là hàm số sơ cấp nên f thuộc một mở rộng sơ cấp $\mathbb{C}(x)(y) \supset \mathbb{C}(x)$ với y là một sơ cấp trên $\mathbb{C}(x)$. Khi đó, $g(f) \in \mathbb{C}(x)(y)(g(z))$. Vì $\mathbb{C}(x)(y)(g(z))$ là mở rộng sơ cấp của $\mathbb{C}(x)$ nên hàm số $g(f)$ là sơ cấp.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng tỏ các hàm số lượng giác và lượng giác ngược là các hàm số sơ cấp theo hai định nghĩa trên.

Ví dụ 1.2. Áp dụng *Công thức Euler* ($e^{ix} = \cos x + i\sin x$) ta có

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),\\
\cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right),\\
\tan x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)},\\
\cot x &= \frac{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}{e^{ix} - e^{-ix}}.
\end{aligned}$$

Theo Định nghĩa 1.3 ta suy ra các hàm số lượng giác là những hàm số sơ cấp. Ta cũng dễ dàng kết luận các hàm số trên là sơ cấp theo Định nghĩa 1.4. Chẳng hạn, với hàm số $\sin x$ ta có $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \in \mathbb{C}(x)(e^{ix})(e^{-ix})$.

Sau đây, ta sẽ chứng tỏ các hàm số lượng giác ngược cũng là các hàm số sơ cấp. Ta có $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$. Từ đó suy ra $x = \arcsin \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$. Đặt $u = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$. Từ đây, ta có một biểu diễn x theo u là
$x = \frac{1}{i}\ln\left(iu + \sqrt{1-u^2}\right)$.
Do đó $\arcsin u = \frac{1}{i}\ln(iu + \sqrt{1-u^2})$. Hay $\arcsin x = \frac{1}{i}\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right)$.
Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}
\arccos x &= \frac{1}{i}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\\
\arctan x &= \frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix},\\
\mathrm{arccot} x &= \frac{1}{2i}\ln\frac{ix-1}{ix+1}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra các hàm số $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ và $\mathrm{arccot} x$ là những hàm số sơ cấp theo mỗi định nghĩa trên.

Định nghĩa 1.5 ([4])**.** Cho G là một mở rộng sơ cấp của trường F. Với mỗi $f \in F$ ta nói rằng f có một *nguyên hàm là hàm số sơ cấp* (hay *nguyên hàm sơ cấp*) nếu có một phần tử $g \in G$ sao cho $g' = f$.

Ví dụ 1.3. Ta có trường $\mathbb{Q}(\ln x)(x)$ là một mở rộng sơ cấp của trường $\mathbb{Q}(x)$. Khi đó vì $\ln x \in \mathbb{Q}(\ln x)(x)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}(x)$ nên ta nói hàm số $\frac{1}{x}$ có nguyên hàm sơ cấp.

Nhận xét 1.1. Nếu g là một nguyên hàm sơ cấp của f thì $g + C$ với C là một hằng số tùy ý cũng là nguyên hàm sơ cấp của f. Ta ký hiệu tập tất cả các nguyên hàm của f là $\int f dx$.

Định nghĩa 1.6. Một đa thức bậc n của ẩn x là biểu thức có dạng

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

trong đó các hệ số $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ là những số thực (hoặc phức) và $a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$.

Ta kí hiệu

i. Bậc của đa thức $P_n(x)$ là $\deg P_n(x)$. Do vậy $\deg P_n(x) = n$.

ii. a_n - hệ số bậc cao nhất (chính) của đa thức.

Chú ý 1.1. Trong luận văn này ta chủ yếu xét các đa thức $P_n(x)$ với các hệ số của nó đều là thực và gọi tắt là đa thức thực. Ký hiệu tập hợp các đa thức với hệ số thực là $\mathbb{R}[x]$.

Định nghĩa 1.7 ([1]-[2])**.** Cho đa thức

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \ (a_n \neq 0),$$

số $\alpha \in \mathbb{C}$ được gọi là nghiệm của đa thức $P_n(x)$ nếu $P_n(\alpha) = 0$.

Nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, sao cho $P_n(x) \vdots (x-\alpha)^k$ nhưng $P_n(x)$ không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$ thì α được gọi là nghiệm bội bậc k của đa thức $f(x)$.

Đặc biệt, khi $k = 1$ thì α được gọi là nghiệm đơn, $k = 2$ thì α được gọi là nghiệm kép.

Chú ý 1.2. Nghiệm của đa thức thực còn gọi là không điểm của đa thức đó.

Định lý 1.1 (Gauss)**.** Mọi đa thức bậc $n \geqslant 1$ trên trường $\mathbb{C}$ đều có đúng n nghiệm nếu mỗi nghiệm được tính một số lần bằng bội của nó.

Bổ đề 1.1. Các nghiệm phức thực sự (khác thực) của đa thức thực $P_n(x)$ xuất hiện theo từng cặp nghiệm liên hợp.

Chứng minh. Thật vậy, nếu $a \in \mathbb{C}$ là nghiệm của phương trình $P_n(x) = 0$ thì $P_n(a) = 0$. Khi đó ta có

$$0 = \overline{P_n(a)} = P_n(\overline{a}).$$

Suy ra $\overline{a}$ cũng là nghiệm của phương trình $P_n(x) = 0$.

Định lý 1.2. Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ bậc n, với hệ số chính $a_n \neq 0$, đều có thể phân tích thành nhân tử dạng

$$f(x) = a_n \prod_{j=1}^{m}(x - d_i) \prod_{k=1}^{s}(x^2 + b_k x + c_k)$$

với $d_i, b_k, c_k \in \mathbb{R}, 2s + m = n, b_k^2 - 4c_k < 0, m, n \in \mathbb{N}^*$.