ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – –

NGUYỄN XUÂN THỦY

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH GIỚI HẠN VÀ ƯỚC LƯỢNG TRONG CÁC DÃY SỐ TUẦN HOÀN VÀ PHẢN TUẦN HOÀN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN XUÂN THỦY

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH GIỚI HẠN VÀ ƯỚC LƯỢNG TRONG CÁC DÃY SỐ TUẦN HOÀN VÀ PHẢN TUẦN HOÀN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

MỞ ĐẦU

Chuyên đề dãy số và các vấn đề liên quan đến dãy số là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Đối với học sinh phổ thông, những khái niệm dãy số thường khó hình dung về cấu trúc đại số trên tập các dãy số, đặc biệt là các phép tính đối với các dãy có chứa tham số, các phép biến đổi dãy và đại số các dãy,... Có nhiều dạng toán loại khó liên quan đến chuyên đề này liên quan đến các kỳ thi học sinh giỏi bậc THPT và các kỳ thi olympic sinh viên.

Dãy số có vị trí đặc biệt trong toán học không chỉ như là những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực của giải tích toán học.

Các bài toán về tính giá trị các tổng, tích cũng như các bài toán cực trị và xác định giới hạn của một biểu thức cho trước thường có mối quan hệ ít nhiều đến các đặc trưng của dãy tương ứng.

Các bài toán về dãy số đã được đề cập ở các giáo trình cơ bản về giải tích toán học và một số tài liệu bồi dưỡng giáo viên và học sinh chuyên toán bậc trung học phổ thông.

Luận văn *Một số phương pháp tính giới hạn và ước lượng trong các dãy số tuần hoàn và phản tuần hoàn* nhằm cung cấp một số kiến thức cơ bản về dãy số và một số vấn đề liên quan đến dãy số tuần hoàn, phản tuần hoàn cộng tính và nhân tính. Đồng thời cũng cho phân loại một số dạng toán về dãy số theo dạng cũng như phương pháp giải.

Nội dung của Luận văn gồm phần mở đầu và ba chương.

Chương 1. Một số tính chất cơ bản của dãy số.
Nội dung của chương này nhằm trình bày định nghĩa các dãy số đặc biệt và các tính chất liên quan. Đồng thời trình bày một số bài toán áp dụng liên quan đến cấp số cộng, cấp số nhân và các tính chất đặc biệt của chúng. Trình bày tính chất của các dãy số chuyển tiếp các đại lượng trung bình cơ bản.

Chương 2. Các bài toán về xác định dãy số tuần hoàn và phản tuần hoàn.
Chương này nhằm giới thiệu một số bài toán về xác định dãy tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính. Nêu một số tính chất cơ bản của dãy số và các bài toán xác định các dãy số liên quan đến các hàm sơ cấp ở phổ thông.

Chương 3. Các bài toán về xác định giới hạn của dãy số.

Chương này nhằm khảo sát về giới hạn dãy số sinh bởi các trung bình cơ bản, về giới hạn của các dãy số xác định bởi dãy các phương trình và trình bày định lý về giới hạn tương đương và áp dụng và sử dụng tích phân để tính giới hạn.

Em xin được gửi lời biết ơn sâu sắc nhất đến GS TSKH NGND Nguyễn Văn Mậu – người thầy đã luôn đồng hành cùng em trong suốt quá trình nghiên cứu. Tận tình chỉ bảo, hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc để em có thể hoàn thành được bài luận văn này.

Em cũng xin gửi lời cám ơn đến các thầy cô, đặc biệt là các thầy cô trong khoa Toán – Tin - Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy, hướng dẫn, động viên em trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Xin được cám ơn gia đình, bạn bè đã luôn động viên, cổ vũ, tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả có thể hoàn thành mọi công việc, nhiệm vụ của mình.

Trong quá trình làm việc do thời gian và năng lực cá nhân còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những khiếm khuyết. Em xin được lắng nghe những ý kiến đóng góp của quý thầy cô để em có thể hoàn thiện hơn bản luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 5 năm 2014
Tác giả: Nguyễn Xuân Thủy

CHƯƠNG 1

Một số tính chất cơ bản của dãy số

1.1. Các tính chất của dãy số

1.1.1. Cấp số cộng, cấp số nhân và cấp số điều hòa

Định nghĩa 1.1 (Cấp số cộng)**.** Dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện: $u_{n+1} = u_n + d$ với mọi số tự nhiên n và d là một hằng số cho trước được gọi là một cấp số cộng, d được gọi là công sai.

* u_n được gọi là số hạng tổng quát của cấp số cộng $\{u_n\}$. Nếu cho trước n ta có cấp số cộng hữu hạn

* Nếu $d = 0$ thì ta có dãy số mà $u_0 = u_1 = \dots$. Khi đó dãy $\{u_n\}$ được gọi là dãy hằng.

* Ký hiệu: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ được gọi là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Nhận xét 1.1. Nếu $\{u_n\}$ là một cấp số cộng công sai d, thì ta có:

* $u_n = u_1 + (n-1)d$,

* $2u_k = u_{k-1} + u_{k+1}, \quad \forall k \geq 2$,

* $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)d}{2} = \dfrac{(u_1 + u_n)n}{2}$.

Bài toán 1.1. Cho $\{u_n\}$ là một cấp số cộng mà các số hạng đều là số nguyên dương. Giả sử trong dãy có một số chính phương. Chứng minh rằng trong dãy đó có vô hạn các số chính phương.

Giải. Giả sử dãy $\{u_n\}$ có công sai $d > 0$ và x là một số chính phương trong dãy và $x = m^2$. Khi đó: $(m + kd)^2 = m^2 + 2mkd + k^2d^2 = x + d\left(2mk + k^2d\right)$. Điều này chứng tỏ trong dãy có vô hạn số chính phương.

Bài toán 1.2. Cho các số dương $u_1, u_2, \dots u_n$. $(2 \leq n \in \mathbb{N})$ lập thành cấp số cộng với công sai $d > 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}$.

Giải. Nhận xét rằng $\dfrac{1}{\sqrt{u_k}+\sqrt{u_{k+1}}} = \dfrac{\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}}{d}$, Cho $k = 1, 2, \ldots (n-1)$. và cộng theo vế ta được:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{d}\left[(\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}) + (\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}) + \cdots + (\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}})\right] \\ &= \frac{1}{d}(\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}) = \frac{1}{d}\frac{u_n-u_1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}} = VP \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 1.3. Cho các số dương $u_1, u_2, ..u_n$ lập thành cấp số cộng. Tính tổng: $S = \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \cdots + \dfrac{1}{u_{n-1}u_n}$.

Giải. Nhận xét rằng $\dfrac{1}{u_ku_{k+1}} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}}\right)$, lần lượt cho $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ vào đẳng thức trên và cộng vế với vế ta được:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right) + \left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_n}\right) = \frac{n-1}{u_1u_n} \end{aligned}$$

Vậy $S = \dfrac{n-1}{u_1u_n}$.

Định nghĩa 1.2 (Cấp số nhân)**.** Dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện $u_n = u_{n-1}q$ với $q$là hằng số cho trước và $1 \leq n \in \mathbb{N}$, được gọi là cấp số nhân, q được gọi là công bội.

* u_n được gọi là số hạng tổng quát của cấp số nhân. Nếu cho trước n ta có cấp số nhân hữu hạn.

* Nếu cấp số nhân có $q = 0$ thì có dạng: $u_0; 0; 0; \ldots; 0; \ldots$

* Nếu cấp số nhân có $q = 1$ thì có dạng: $u_0; u_0; \ldots; u_0; \ldots$

* Ta luôn có: $u_n = u_1q^{n-1} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$.

* Ta luôn có: $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \quad \forall k \geq 2$

* Ta luôn có: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$

Định nghĩa 1.3 (Cấp số điều hòa)**.** Dãy số $\{u_n\}, (u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N})$ thỏa mãn điều kiện $u_n = \dfrac{2u_{n-1}.u_{n+1}}{u_{n-1} + u_{n+1}}$ được gọi là cấp số điều hòa.

Bài toán 1.4. Chứng minh rằng dãy số $\{u_n\}$ lập thành một dãy số điều hòa khi và chỉ khi dãy đã cho thỏa mãn điều kiện $u_{n+1} = \dfrac{1}{\dfrac{2}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}}$.

Giải. Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{1}{\dfrac{2}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}} \Leftrightarrow u_{n+1} = \dfrac{u_n u_{n-1}}{2u_{n-1} - u_n} \Leftrightarrow u_n\left(u_{n-1} + u_{n+1}\right) = 2u_{n-1}u_{n+1} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1} + u_{n+1}}$.

Vậy dãy số $\{u_n\}$ lập thành một cấp số điều hòa.

1.1.2. Dãy tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

Định nghĩa 1.4. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là dãy tuần hoàn (cộng tính) nếu tồn tại số nguyên dương l sao cho: $u_{n+l} = u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Số nguyên dương l bé nhất thỏa mãn điều kiện trên được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy.

Định nghĩa 1.5. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là phản tuần hoàn (cộng tính) nếu tồn tại số nguyên dương l sao cho $u_{n+l} = -u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét 1.2.

- Dãy tuần hoàn chu kỳ 1 khi và chỉ khi dãy đã cho là dãy hằng.
- Dãy tuần hoàn chu kỳ 2 khi và chỉ khi dãy có dạng:
$u_n = \dfrac{1}{2}\left[\alpha + \beta + (\alpha - \beta)(-1)^{n+1}\right], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1.1.3. Dãy tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.6. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là dãy số tuần hoàn nhân tính nếu tồn tại số nguyên dương s $(s > 1)$ sao cho $u_{sn} = u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Số nguyên dương s bé nhất để dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện trên được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy

Nhận xét 1.3. Một dãy phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ r thì sẽ tuần hoàn cộng tính chu kỳ $2r$.

Định nghĩa 1.7. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là dãy số phản tuần hoàn nhân tính nếu tồn tại số nguyên dương s $(s > 1)$ sao cho: $u_{sn} = -u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Nhận xét 1.4. Mọi dãy $\{u_n\}$ phản tuần hoàn chu kỳ r đều có dạng $u_n = \dfrac{1}{2}(v_n - v_{n+r})$, với $v_{n+2r} = v_n$.

1.2. Một số định lý về giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.8. Dãy $\{u_n\}$ được gọi là hội tụ về a, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tùy ý, tìm được số n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$ đều có $|u_n - a| < \varepsilon$, tức là:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, |u_n - a| < \varepsilon.$

Định lý 1.1 (Tính duy nhất của giới hạn)**.** Giới hạn của một dãy hội tụ là duy nhất.

Định lý 1.2 (Tính thứ tự của dãy hội tụ)**.** Cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ và $a \in \mathbb{R}$. Khi đó

- Nếu $a > l$ thì $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a > x_n$
- Nếu $a < n$ thì $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow a < x_n$

Định lý 1.3 (Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức)**.** Cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ và $a \in \mathbb{R}$.

- Nếu $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \geq a$ thì $l \geq a$
- Nếu $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \leq a$ thì $l \leq a$

Định lý 1.4 (Định lý giới hạn kẹp giữa)**.** Cho ba dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ thỏa mãn:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow z_n \leq x_n \leq y_n$
- Các dãy $\{y_n\}, \{z_n\}$ cùng hội tụ đến l.

Khi đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Định lý 1.5 (Tính chất đại số của dãy hội tụ)**.** Cho hai dãy hội tụ $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Khi đó:

* Dãy $\{-x_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -a$

* Dãy $\{|x_n|\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$.

* Dãy $\{x_n + y_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

* Dãy $\{x_n - y_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$.

* Dãy $\{kx_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n) = ka$.

* Dãy $\{x_n.y_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n.y_n) = a.b$.

* Với $b \neq 0$ thì dãy $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ được xác định từ một chỉ số nào đó là hội tụ và: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = \dfrac{1}{b}$

* Với $b \neq 0$ thì dãy $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ được xác định từ một chỉ số nào đó là hội tụ và:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

Định lý 1.6. Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.

Định lý 1.7. Mọi dãy đơn điệu và bị chặn đều hội tụ.

Định lý 1.8 (Định lý Bolzano – Veierstrass)**.** Từ một dãy bị chặn luôn rút ra được một dãy con hội tụ.

Định lý 1.9 (Tiêu chuẩn Cauchy)**.** Dãy $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall\varepsilon > 0$ cho trước tùy ý, tìm được chỉ số n_0 sao cho với mọi $m, n \geq n_0$ đều có $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

1.3. Dãy số chuyển tiếp các đại lượng trung bình

Dưới đây ta xét một số bài toán chuyển tiếp các đại lượng trung bình cơ bản trong chương trình phổ thông.

1.3.1. Phép chuyển các đại lượng trung bình cộng

Bài toán 1.5. Xác định dãy số $\{u_n\}$, sao cho

$$u\left(\frac{m+n}{2}\right) = \frac{u(m)+u(n)}{2},\ \ \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}^*. \tag{1.1}$$