ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NỊNH MẠNH CƯỜNG

ĐỊNH LÝ CEVA
ĐỊNH LÝ MENELAUS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NỊNH MẠNH CƯỜNG

ĐỊNH LÝ CEVA
ĐỊNH LÝ MENELAUS

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN VĂN MINH

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Mở đầu

Trong một số bài toán liên quan đến chứng minh ba đường thẳng đồng quy hoặc chứng minh ba điểm thẳng hàng, có nhiều bài toán nếu chỉ sử dụng những kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa thì việc tìm ra hướng giải là khó khăn. Nhưng nếu sử dụng định lý Ceva và định lý Menelaus để giải thì thuận lợi hơn, đặc biệt trong nhiều bài toán, nếu không sử dụng định lý Ceva và định lý Menelaus thì không chứng minh được, hơn nữa nếu sử dụng hai định lý này sẽ làm cho bài giải trở nên súc tích hơn. Do đó định lý Ceva và định lý Menelaus là định lý quan trọng trong hình học sơ cấp, là một công cụ hỗ trợ đắc lực khi giải các bài toán về hình học.

Trong mỗi bài toán có sử dụng định lý Ceva hoặc định lý Menelaus để giải thì nó là một mắt xích quan trọng, một định hướng thông xuất trong quá trình tư duy. Ngoài ra hai định lý này còn là công cụ tư duy hữu ích để phát triển các bài toán và cho ta một cách nhìn mới đối với bài toán đó. Điều đó khiến cho người học toán không những phát triển được kiến thức hình học của mình mà còn cung cấp cho họ một cái nhìn sâu hơn về bài toán.

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Định lý Ceva và định lý Menelaus. Chương này trình bày nội dung định lý Ceva, định lý Menelaus và một số dạng mở rộng của hai định lý này.

Chương 2. Bài tập vận dụng định lý Ceva và định lý Menelaus. Chương này trình bày một số bài toán hình học sơ cấp có sử dụng định lý Ceva và định lý Menelaus để giải.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Nguyễn Văn Minh, Trường ĐHKT và QTKD - ĐHTN. Là người học trò đã tiếp thu được nhiều điều từ thầy, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự tận tình chỉ bảo, hướng dẫn của thầy.

Tôi xin cảm ơn tới các thầy cô trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học toán K6A, trường Đại học Khoa học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin cảm ơn tới Sở GD - ĐT tỉnh Tuyên Quang, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Thái Hòa đã tạo mọi điều kiện giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và hoàn thành luận văn.

Tuy nhiên, do năng lực bản thân và thời gian nghiên cứu có hạn nên không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong nhận được sự chỉ bảo và đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 6 tháng 7 năm 2014

Tác giả

Nịnh Mạnh Cường

Chương 1

Định lý Ceva và định lý Menelaus

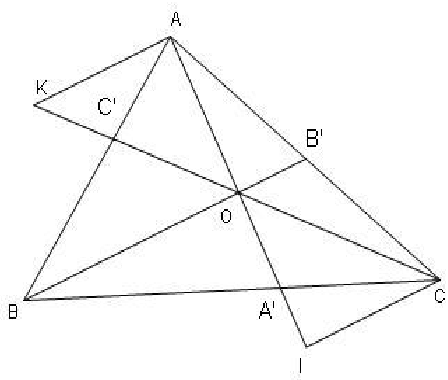
1.1 Định lý Ceva

1.1.1 Định lý Ceva

Định lý 1.1.1. *(Định lý Ceva) Cho tam giác* ABC*. Gọi* A', B', C' *là ba điểm tương ứng nằm trên* BC, CA, AB*. Ba đường thẳng* AA', BB', CC' *cắt nhau tại một điểm* O *khi và chỉ khi:*

$$\frac{C'A}{C'B}.\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A} = 1. \tag{1.1}$$

Chứng minh.



Hình 1.1

Phần thuận:

Giả sử ba đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại điểm O. Từ A và C, kẻ các đường song song với BB', chúng lần lượt cắt CC' và AA' tại K, I tương ứng, ta có:

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{OC}{OK} \text{ và } \frac{IC}{KA} = \frac{OC}{OK}. \textit{ (Sử dụng định lý Thales)}$$

Suy ra
$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{IC}{KA}. \tag{1.2}$$
Vì $\triangle IA'C \backsim \triangle OA'B$, $\triangle AKC' \backsim \triangle BOC'$ ta có:
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{OB}{IC}, \frac{C'A}{C'B} = \frac{KA}{OB}. \tag{1.3}$$
Từ (1.2) và (1.3) ta suy ra
$$\frac{C'A}{C'B}.\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A} = \frac{KA}{OB}.\frac{OB}{IC}.\frac{IC}{KA} = 1.$$

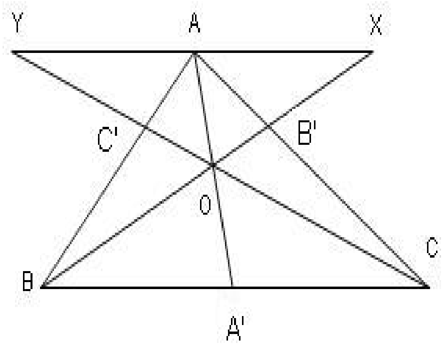
Phần đảo:

Giả sử ta có:
$$\frac{C'A}{C'B}.\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A} = \frac{KA}{OB}.\frac{OB}{IC}.\frac{IC}{KA} = 1.$$
Qua giao điểm của các đường thẳng AA' và BB', kẻ đường thẳng CC_1 với C_1 nằm trên cạnh AB. Khi đó, theo chứng minh phần thuận ta có:
$$\frac{C_1A}{C_1B}.\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A} = \frac{KA}{OB}.\frac{OB}{IC}.\frac{IC}{KA} = \frac{C'A}{C'B}.\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A} = 1$$
suy ra $\dfrac{C_1A}{C_1B} = \dfrac{C'A}{C'B} \Rightarrow C_1 \equiv C'$ ta có điều phải chứng minh.

1.1.2 Định lý Ceva dạng mở rộng

*) **Chú ý:** Định lý Ceva trong trường hợp tổng quát khi các điểm A', B', C' không chỉ nằm trên các cạnh theo thứ tự BC, AC, AB của $\triangle ABC$ mà nó có thể nằm tuỳ ý trên các đường thẳng chứa các cạnh. Định lý được phát biểu như sau:

Định lý 1.1.2. *Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' khác A, B, C theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó các đường thẳng AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi:*
$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1. \tag{1.4}$$



Hình 1.2

Chứng minh.

Chứng minh điều kiện cần. Có hai trường hợp cần xét.

Trường hợp 1. AA', BB', CC' đồng quy (hình 1.2).

Giả sử AA', BB', CC' đồng quy tại O. Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này theo thứ tự cắt BB', CC' tại X, Y.

Theo hệ quả của định lý Thales dạng đại số:

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{AX}}{\overline{AY}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{AY}}.\frac{\overline{AX}}{\overline{XA}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}} = -1.$$

Trường hợp 2. AA', BB', CC' đôi một song song (hình 1.3).

Theo hệ quả của định lý Thales dạng đại số:

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}$$
$$= \frac{\overline{A'B}}{\overline{BA'}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{CA'}}{\overline{A'C}} = (-1).(-1).(-1) = -1.$$

Tóm lại, trong cả hai trường hợp, ta đều có:

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1.$$

Chứng minh điều kiện đủ. Ta chứng minh nếu ba đường AA', BB', CC' không đôi một song song thì chúng phải đồng quy.

Giả sử AA', BB' không song song. Đặt $O = AA' \cap BB'$. Khi đó CO và AB không song song (hình 1.4). Thật vậy, nếu CO song song với AB thì theo hệ quả của định lý Thales dạng đại số, ta có :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OC}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{CO}} = -\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \Rightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1.$$

Mặt khác, theo giả thiết: $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1.$

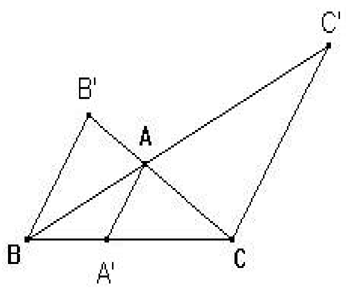
Suy ra: $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \Rightarrow \overline{C'A} = \overline{C'B} \Rightarrow A \equiv B$, mâu thuẫn.

Vậy CO không song song với AB. Đặt $C_1 = CO \cap AB$. Theo kết quả đạt được trong phép chứng minh điều kiện cần: $\dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}.\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1.$

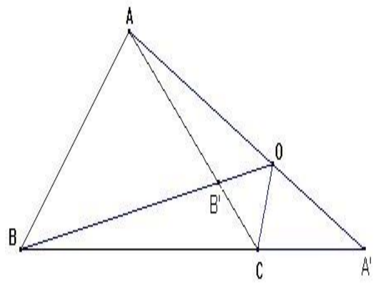
Từ đó với chú ý rằng $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1$, ta có:

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \Rightarrow C_1 \equiv C'.$$

Tóm lại AA', BB', CC' đồng quy.□



Hình 1.3



Hình 1.4

1.1.3 Định lý Ceva cho ngũ giác

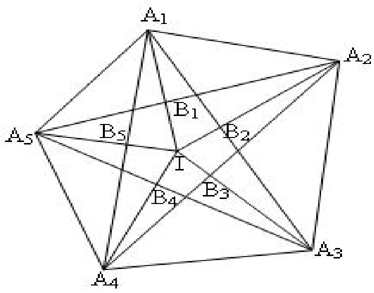
Định lý 1.1.3. *Cho ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ và năm điểm B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 lần lượt nằm trên năm đường thẳng $A_5A_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_1$. Nếu các đường thẳng $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5$ đồng quy thì*

$$\frac{\overline{B_1A_5}}{\overline{B_1A_2}}.\frac{\overline{B_2A_1}}{\overline{B_2A_3}}.\frac{\overline{B_3A_2}}{\overline{B_3A_4}}.\frac{\overline{B_4A_3}}{\overline{B_4A_5}}.\frac{\overline{B_5A_4}}{\overline{B_5A_1}} = -1. \tag{1.5}$$

Chứng minh. Giả sử năm đường thẳng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5 đồng quy tại điểm I theo định lý về tỷ lệ diện tích ta có:

$$\frac{\overline{B_1A_5}}{\overline{B_1A_2}}.\frac{\overline{B_2A_1}}{\overline{B_2A_3}}.\frac{\overline{B_3A_2}}{\overline{B_3A_4}}.\frac{\overline{B_4A_3}}{\overline{B_4A_5}}.\frac{\overline{B_5A_4}}{\overline{B_5A_1}}$$
$$= \frac{\overline{s}(IA_1A_5)}{\overline{s}(IA_1A_2)}.\frac{\overline{s}(IA_2A_1)}{\overline{s}(IA_2A_3)}.\frac{\overline{s}(IA_3A_2)}{\overline{s}(IA_3A_4)}.\frac{\overline{s}(IA_4A_3)}{\overline{s}(IA_4A_5)}.\frac{\overline{s}(IA_5A_4)}{\overline{s}(IA_5A_1)}$$

$$= -\frac{\overline{s}(IA_5A_1)}{\overline{s}(IA_1A_2)}.\frac{\overline{s}(IA_1A_2)}{\overline{s}(IA_2A_3)}.\frac{\overline{s}(IA_2A_3)}{\overline{s}(IA_3A_4)}.\frac{\overline{s}(IA_3A_4)}{\overline{s}(IA_4A_5)}.\frac{\overline{s}(IA_4A_5)}{\overline{s}(IA_5A_1)} = -1$$



Hình 1.5

Chú ý: Định lý Ceva cho đa giác bất kỳ:

Cho đa giác n - cạnh $A_1A_2...A_n$ và n điểm $B_1, B_2, ..., B_n$, lần lượt nằm trên các đường thẳng $A_nA_2, A_1A_3, A_2A_4, ...A_{i-1}A_{i+1}, A_{n-1}A_1$. Nếu n đường thẳng $A_1B_1, A_2B_2, ...A_nB_n$ đồng quy thì

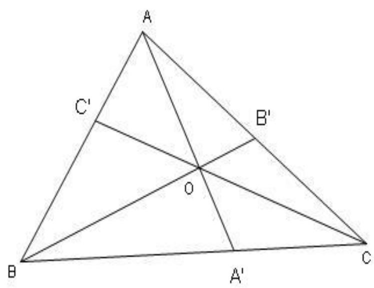
$$\frac{\overline{B_1A_n}}{\overline{B_1A_2}}.\frac{\overline{B_2A_1}}{\overline{B_2A_3}}.\frac{\overline{B_3A_2}}{\overline{B_3A_4}}...\frac{\overline{B_iA_{i-1}}}{\overline{B_iA_{i+1}}}.\frac{\overline{B_nA_{n-1}}}{\overline{B_nA_1}} = (-1)^n.(i = 2, 3, ..., n-1) \quad (1.6)$$

1.1.4 Định lý Ceva dạng sin

Định lý 1.1.4. *Gọi A', B', C' là ba điểm tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Ba đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại một điểm O khi và chỉ khi*

$$\frac{sin\widehat{ABB'}}{sin\widehat{CBB'}}.\frac{sin\widehat{BCC'}}{sin\widehat{ACC'}}.\frac{sin\widehat{CAA'}}{sin\widehat{BAA'}} = 1. \quad (1.7)$$

Chứng minh.



Hình 1.6