ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VIỆT HÒA

HÀM SỐ HỌC
VÀ DẠNG MODULAR

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VIỆT HÒA

HÀM SỐ HỌC VÀ DẠNG MODULAR

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Số học là bộ môn toán xuất hiện sớm nhất của toán học. Với đối tượng nghiên cứu chỉ là các số nguyên, nhưng lại có rất nhiều các giả thuyết, bài toán vẫn chưa có lời giải. Trong hành trình tìm kiếm lời giải cho những bài toán đó, nhiều lý thuyết mới của toán học đã nảy sinh, thúc đẩy toán học không ngừng phát triển. Ngày nay, số học có nhiều ứng dụng quan trọng trong cuộc sống, đặc biệt trong tin học về việc mã hóa và bảo mật thông tin. Cùng với những kiến thức ở bậc phổ thông, thì lý thuyết về các dạng Modular góp thêm một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu số học. Dạng Modular là một hướng nghiên cứu quan trọng của số học, hình học đại số và nhiều ngành khác của toán học. Một số ứng dụng của lý thuyết dạng Modular có thể ứng dụng để nghiên cứu các hàm số học. Bản luận văn này trình bầy những kết quả cơ bản về lý thuyết các dạng Modular và một số ứng dụng trong số học.
Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn gồm 2 chương:
Chương 1. Lý thuyết các dạng Modular . Chương này trình bầy những định nghĩa, khái niệm và kết quả cơ bản về lý thuyết các dạng Modular như: Nhóm Modular, hàm Modular, không gian các dạng Modular. Một số kiến thức bổ trợ như: Lưới sinh bởi cặp số phức (ω_1, ω_2), chuỗi Eisenstein và các bất biến g_1, g_2. Các định lý 1.5.2 và 1.5.3 cùng các hệ quả của nó.
Chương 2. Một số ứng dụng trong số học. Chương này trình bày một số ứng dụng của lý thuyết các dạng Modular trong số học. Như mô tả chi tiết khai triển các hàm E, Dựa vào công thức về số chiều để đưa đến một số hệ thức giữa các hàm E. Với khai triển Fourier của G_k, cùng với những kiến thức trong chương 1, thiết lập được một sô hệ thức liên hệ của các hàm số học $\zeta(2k), \delta_k(n), \tau(n)$. Từ đó ta có những phương pháp sáng tác một lớp bài tập số học.

Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn chân thành đến người thầy, người hướng dẫn khoa học GS. TSKH Hà Huy Khoái về sự giúp đỡ chu đáo, chỉ bảo tận tâm của thầy trong suốt quá trình hoàn thành bản luận văn.
Trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành bản luận văn, tác giả đã nhận được sự quan tâm giúp đỡ của các thầy, cô giáo, cán bộ nhân viên của Phòng đào tạo sau đại học và quan hệ quốc tế, trường Đại học khoa học- Đại học Thái Nguyên.
Tác giả xin chân thành cảm ơn BGH trường THPT Tô Hiệu - Thường Tín, tổ toán trường THPT Tô Hiệu - Thường Tín, các bạn học viên lớp cao học Toán K6a trường Đại học khoa học- Đại học Thái Nguyên, cùng các bạn bè đồng nghiệp đã tạo những điều kiện thuận lợi cả về vật chất lẫn tinh thần giúp tôi hoàn thành khóa học và bản luận văn này.
Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới cha mẹ, những người thân trong gia đình đã tin tưởng, giúp đỡ, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập.
Mặc dù đã cố gắng rất nhiều nhưng bản luận văn vẫn khó tránh khỏi những khiếm khuyết. Tác giả mong muốn nhận được những nhận xét, góp ý của các thầy, cô giáo và các bạn bè đồng nghiệp để nội dung bản luận văn này được hoàn thiện hơn.
Tác giả xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, ngày 11 tháng 5 năm 2014

Tác giả

Phạm Việt Hòa

Chương 1

Lý thuyết các dạng modular

1.1 Lưới sinh bởi cặp số phức (ω_1, ω_2)

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử ω_1, ω_2 là các số phức sao cho ω_1/ω_2 không phải là số thực. Tập gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính
$n\omega_1 + m\omega_2$, trong đó m, n là các số nguyên, được gọi là *lưới sinh bởi ω_1 và ω_2*. Kí hiệu là $\Omega(\omega_1, \omega_2)$.

Định nghĩa 1.1.2. Hai cặp số phức (ω_1, ω_2) và $\left(\omega_1^{'}, \omega_2^{'}\right)$, trong đó ω_1/ω_2 và $\omega_1^{'}/\omega_2^{'}$ không phải là số thực, được gọi là *tương đương nhau* nếu chúng sinh ra cùng một lưới tức là $\Omega(\omega_1, \omega_2) = \Omega\left(\omega_1^{'}, \omega_2^{'}\right)$.

Mệnh đề 1.1.3. *Hai cặp (ω_1, ω_2) và $(\omega_1^{'}, \omega_2^{'})$ tương đương nhau khi và chỉ khi tồn tại ma trận 2×2 , $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với các phần tử nguyên thỏa mãn $ad - bc = \pm 1$,
sao cho*

$$\begin{pmatrix} \omega_2^{'} \\ \omega_1^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix},$$

tức là

$$\begin{cases} \omega_2^{'} = a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega_1^{'} = c\omega_2 + d\omega_1 \end{cases}.$$

Chứng minh. Giả sử hai cặp (ω_1, ω_2) và $(\omega_1^{'}, \omega_2^{'})$ tương đương. Khi đó

$$\Omega(\omega_1, \omega_2) = \Omega\left(\omega_1^{'}, \omega_2^{'}\right).$$

Theo định nghĩa, tồn tại các số nguyên $a, b, c, d, a', b', c', d'$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \omega_2^{'} = a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega_1^{'} = c\omega_2 + d\omega_1 \end{cases}$$

hay là

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

Tương tự ta cũng có

$$\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Ta đặt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $X = A.A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, khi đó (1) có dạng

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix}$$

nghĩa là

$$\begin{cases} \omega_2' = x\omega_2' + y\omega_1' \\ \omega_1' = z\omega_2' + t\omega_1' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_2'(1-x) = y\omega_1' \\ \omega_1'(1-t) = z\omega_2' \end{cases} \tag{1.2}$$

Vì ω_1/ω_2 không phải là số thực, nên (2) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = t = 1 \\ y = z = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.A',$$

suy ra $\det A = \pm 1$ (do $a, b, c, d, a', b', c', d'$ là các số nguyên).
Ngược lại, nếu tồn tại ma trận 2×2, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với phần tử là các số nguyên thỏa mãn $ad - bc = \pm 1$, sao cho

$$\begin{cases} \omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1 \end{cases},$$

thì rõ ràng hai cặp (ω_1, ω_2) và (ω_1', ω_2') là tương đương. □

Mệnh đề 1.1.4. *Giả sử α là số thực và cho $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$. Khi đó chuỗi*

$$\sum_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \frac{1}{\omega^\alpha}$$

hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi $\alpha > 2$.

Hình 1.1

Chứng minh. Xét các hình bình hành có các đỉnh là $\omega_1 \pm \omega_2, -\omega_1 \pm \omega_2$. Gọi R và r là khoảng cách cực đại, cực tiểu từ O đến biên của hình bình hành. Nếu $\omega \neq 0$, là một trong 8 tổ hợp tuyến tính của ω_1 và ω_2 trên hình bình hành thì

$$r \leq |\omega| \leq R.$$

Trong hình bình hành đồng tâm tiếp theo, ta có 16 tổ hợp tuyến tính của ω_1 và ω_2 thỏa mãn bất đẳng thức

$$2r \leq |\omega| \leq 2R.$$

Tương tự, có 24 tổ hợp thỏa mãn bất đẳng thức

$$3r \leq |\omega| \leq 3R.$$

Xét tổng

$$S(n) = \sum \left| \frac{1}{\omega^\alpha} \right|,$$

lấy trên $8(1 + 2 + 3 + ... + n)$ tổ hợp khác 0 gần gốc. Ta có

$$8\left(\frac{1}{R^\alpha} + \frac{2}{(2R)^\alpha} + ... + \frac{n}{(nR)^\alpha}\right) \leq S(n) \leq 8\left(\frac{1}{r^\alpha} + \frac{2}{(2r)^\alpha} + ... + \frac{n}{(nr)^\alpha}\right),$$

hay là

$$8\frac{1}{R^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \leq S(n) \leq 8\frac{1}{r^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Do đó các tổng riêng $S(n)$ tùy ý sẽ nằm giữa $8\frac{1}{R^\alpha}\zeta(\alpha-1)$ và $8\frac{1}{r^\alpha}\zeta(\alpha-1)$, giới nội trên bởi $8\frac{1}{r^\alpha}\zeta(\alpha-1)$, hội tụ nếu $\alpha > 2$. Nhưng một tổng riêng sẽ nằm giữa

$$8\frac{1}{R^\alpha}\zeta(\alpha-1) \text{ và } 8\frac{1}{r^\alpha}\zeta(\alpha-1).$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi $\alpha > 2$. Cận dưới cho ta thấy chuỗi phân kỳ khi $\alpha \leq 2$. □

Bổ đề 1.1.5. *Với $\alpha > 2$, $R > 0$, chuỗi*

$$\sum_{|\omega|>R} \frac{1}{(z-\omega)^\alpha}$$

hội tụ tuyệt đối và đều trong đĩa $|z| \leq R$.

Chứng minh. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại hằng số M (phụ thuộc R, α) sao cho nếu $\alpha \geq 1$ thì ta có:

$$\frac{1}{|z-\omega|^\alpha} \leq \frac{M}{|\omega|^\alpha}, \tag{1.3}$$

với mọi $|\omega| \geq R$, và với mọi z thỏa mãn $|z| \leq R$. Khi đó theo mệnh đề 1.1.4, ta có điều phải chứng minh.
Bất đẳng thức (1.3) tương đương với

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right|^\alpha \geq \frac{1}{M}.$$

Để xác định M, ta xét mọi chu kỳ ω với $|\omega| > R$. Chọn trong số đó phần tử có môđun bé nhất, chẳng hạn

$$|\omega| = R + d, d > 0.$$

Khi đó nếu $|z| \leq R$ và $|\omega| \geq R + d$, thì ta có:

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right| = \left|1 - \frac{z}{\omega}\right| \geq 1 - \left|\frac{z}{\omega}\right| \geq 1 - \frac{R}{R+d}.$$

Do đó

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right|^\alpha \geq \left(1 - \frac{R}{R+d}\right)^\alpha = \frac{1}{M}.$$

Vậy với
$$M = \left(1 - \frac{R}{R+d}\right)^{-\alpha},$$
thì bổ đề được chứng minh. □

1.2 Chuỗi Eisenstein và các bất biến g_2, g_3

Định nghĩa 1.2.1. Với k nguyên, $k \geq 2$, chuỗi
$$G_k = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{2k}}$$
được gọi là *chuỗi Eisenstein cấp k.* Các bất biến $g_{2,}g_3$ là các chuỗi được xác định bởi
$$g_2 = 60G_2, g_3 = 140G_3.$$

Định nghĩa 1.2.2. Biệt thức Δ là biểu thức xác định bởi
$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Nhận xét: Ta xem các bất biến g_2, g_3 và biệt thức Δ như là các hàm của ω_1, ω_2 và viết:
$$g_2 = g_2\left(\omega_1, \omega_2\right), g_3 = g_3\left(\omega_1, \omega_2\right), \Delta = \Delta\left(\omega_1, \omega_2\right).$$

Các chuỗi Eisenstein chỉ ra rằng, các hàm g_2, g_3 là các hàm thuần nhất bậc -4 và -6, nên với mọi $\lambda \neq 0$ ta có:
$$g_2\left(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2\right) = \lambda^{-4} g_2\left(\omega_1, \omega_2\right),$$
$$g_3\left(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2\right) = \lambda^{-6} g_3\left(\omega_1, \omega_2\right),$$
nên
$$\Delta\left(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2\right) = \lambda^{-12} \Delta\left(\omega_1, \omega_2\right).$$
Vậy Δ là hàm thuần nhất bậc -12. Lấy $\lambda = \dfrac{1}{\omega_1}$ và đặt $z = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$, ta được
$$g_2\left(1, z\right) = {\omega_1}^4 g_2\left(\omega_1, \omega_2\right),$$
$$g_3\left(1, z\right) = {\omega_1}^6 g_3\left(\omega_1, \omega_2\right),$$