ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN HUY HOÀN

BÀI TOÁN DIRICHLET
CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC VỚI HỆ SỐ BIẾN THIÊN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN HUY HOÀN

BÀI TOÁN DIRICHLET CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC VỚI HỆ SỐ BIẾN THIÊN

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS Hà Tiến Ngoạn

THÁI NGUYÊN – 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan, Luận văn này là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn trực tiếp của PGS.TS Hà Tiến Ngoạn.

Trong quá trình nghiên cứu đề tài Luận văn, tôi đã kế thừa thành quả khoa học của các nhà Toán học và các nhà Khoa học với sự trân trọng và biết ơn.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2014

Tác giả

Trần Huy Hoàn

LỜI CẢM ƠN

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của PGS.TS Hà Tiến Ngoạn (Viện Toán học Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý thầy cô giảng dạy lớp cao học khóa 6 (2012-2014) đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và trong cuộc sống.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên tạo những điều kiện tốt nhất cho khóa học này.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2014.

Tác giả

Trần Huy Hoàn

Mục lục

	Trang
Trang phụ bìa	i
Lời cam đoan	ii
Lời cảm ơn	iii
Mục lục	iv
MỞ ĐẦU	1
NỘI DUNG	2
CHƯƠNG I NGHIỆM YẾU CỦA BÀI TOÁN DIRICHLET	2
1.1 Nghiệm yếu của bài toán Dirichlet trong nửa hình cầu	2
1.2 Điều kiện cần và đủ để tồn tại nghiệm yếu	5
1.3 Các đánh giá tiên nghiệm	7
1.3.1 Hệ toán tử biên chuẩn tắc	7
1.3.2 Biến đổi Fourier và một số không gian hàm	11
1.3.3 Đánh giá tiên nghiệm	14
1.4 Trường hợp hình cầu có bán kính đủ nhỏ	18
CHƯƠNG II TÍNH TRƠN CỦA NGHIỆM YẾU	21
2.1 Các toán tử compact	21
2.2 Phép nhúng compact	24
2.3 Một số bổ đề	30
2.4 Độ trơn của nghiệm yếu	35
2.5 Sự tồn tại của nghiệm trơn vô hạn	40
KẾT LUẬN	42
TÀI LIỆU THAM KHẢO	43

MỞ ĐẦU

Lý thuyết bài toán biên elliptic cho phương trình elliptic đúng đắn đã được nghiên cứu, đó là trường hợp cấp của phương trình là chẵn, số các nghiệm đặc trưng với phần ảo dương và phần ảo âm là bằng nhau và số điều kiện biên bằng nửa số cấp của phương trình, đồng thời điều kiện Shapiro-Lopatinski trên toàn bộ phần biên của miền được thỏa mãn.

Luận văn nghiên cứu bài toán Dirichlet trong nửa hình cầu cho phương trình elliptic đúng đắn, trong đó số các điều kiện biên bằng nửa số cấp của phương trình, nhưng các điều kiện biên thuần nhất chỉ được cho trên phần của mặt phẳng đi qua tâm hình cầu và trên phần biên mặt cầu không có điều kiện biên nào.

Luận văn gồm 2 chương:

Chương I trình bày khái niệm nghiệm yếu của bài toán Dirichlet, phát biểu và chứng minh định lý về điều kiện cần và đủ đối với vế phải của phương trình để tồn tại nghiệm yếu. Đó là điều kiện mà trong đó vế phải của phương trình phải thỏa mãn một số hữu hạn các điều kiện trực giao. Luận văn đã chỉ rằng đối với nửa hình cầu có bán kính đủ nhỏ, nếu điều kiện cần được thỏa mãn thì luôn tồn tại nghiệm yếu của bài toán.

Chương II nghiên cứu tính trơn của nghiệm yếu. Kết quả chính của chương II phát biểu rằng khi các hệ số và vế phải của phương trình là các hàm đủ trơn thì nghiệm yếu của bài toán cũng có độ trơn tương ứng và là nghiệm cổ điển của phương trình.

Tài liệu tham khảo chính của luận văn là chương 8 của tài liệu [1].

NỘI DUNG

CHƯƠNG 1 NGHIỆM YẾU CỦA BÀI TOÁN DIRICHLET

1.1 Nghiệm yếu của bài toán Dirichlet trong nửa hình cầu

Trước hết ta nhắc lại các ký hiệu

$$x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}.$$

$$\sigma_R=\left\{\left(x,t\right)\in\mathbb{R}^{n+1};\left|x\right|^2+t^2<R^2, t>0\right\}.$$

$$\partial_0\sigma_R=\sigma_R\cap\left\{t=0\right\}.$$

$$\partial_1\sigma_R=\left\{\left(x,t\right)\in\mathbb{R}^{n+1};\left|x\right|^2+t^2=R^2, t>0\right\}.$$

$$\xi=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)\in\mathbb{R}^n; z\in\mathbb{C};\left(\xi,z\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}.$$

$$\mu=\left(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n\right)\in\mathbb{N}^n,\left|\mu\right|=\mu_1+\mu_2+...+\mu_n.$$

$$\xi^\mu=\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}...\xi_n^{\mu_n}.$$

$$D_x=\left(D_{x_1},D_{x_2},...,D_{x_n}\right);D_{x_j}=-i\frac{\partial}{\partial x_j};D_t=-i\frac{\partial}{\partial t}.$$

$$D=\left(D_x,D_t\right).$$

$$D_x^\mu=D_{x_1}^{\mu_1}D_{x_2}^{\mu_2}...D_{x_n}^{\mu_n}.$$

$$P\left(x,t,D\right)=P(x,t,D_x,D_t)=\sum_{|\mu|+k\le m}a_{\mu k}\left(x,t\right)D_x^\mu D_t^k.$$

$$P\left(x,t,\xi,z\right)=\sum_{|\mu|+k\le m}a_{\mu k}\left(x,t\right)\xi^\mu z^k.$$

$$P_m\left(x,t,\xi,z\right)=\sum_{|\mu|+k=m}a_{\mu k}\left(x,t\right)\xi^\mu z^k.$$

Trong miền σ_R xét toán tử sau:

$$P(x,t,D)=\sum_{|\mu|+k\le m} a_{\mu,k}(x,t)D_x^{\mu}D_t^{k}, \tag{1.1}$$

trong đó các hệ số được giả thiết thuộc $C^{\infty}\left(\overline{\sigma}_R\right)$.

Trong miền σ_R ta xét bài toán Dirichlet sau đây:

$$P(x,t,D)u(x,t)=f(x,t), \qquad (x,t)\in\sigma_R \tag{1.2}$$

$$D_t^k u(x,0)=0, \quad |x|<R\,;0\le k<r. \tag{1.3}$$

Toán tử trên được gọi là elliptic đúng đắn trong σ_R nếu m = 2r và

$\forall(x,t)\in\sigma_R,\forall\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ phương trình đối với z sau đây có r nghiệm với phần ảo dương và r nghiệm với phần ảo âm:

$$P_{2r}\left(x,t,\xi,z\right)=0.$$

Với mỗi $f\in C^{\infty}\left(\overline{\sigma}_R\right)$ ta hy vọng rằng ta có thể tìm ra lời giải trong $C^{m}\left(\overline{\sigma}_R\right)$. Chúng ta thấy rằng thậm chí với một bài toán đơn giản nhất như trên cũng sẽ yêu cầu có phương pháp giải nhất định.

Trước hết ta phân tích để đưa ra khái niệm nghiệm yếu.

Giả sử $u(x,t)\in C^{m}\left(\overline{\sigma}_R\right)$ là một nghiệm cổ điển của Bài toán (1.2), (1.3). Giả sử $\partial_0\sigma_R$ là phần biên của của σ_R nằm trong siêu phẳng t = 0 và giả sử $\partial_1\sigma_R$ là phần còn lại của biên, tức là phần nằm trong mặt phẳng $|x|^2+t^2=R^2, t>0.$ Giả sử $\varphi\in C^{m}\left(\overline{\sigma}_R\right)$ là một hàm số bất kỳ trong $C^{m}(\overline{\sigma}_R)$ và triệt tiêu trong lân cận $\partial_1\sigma_R$. Nhân hai vế của phương trình (1.2) với hàm $\overline{\varphi(x,t)}$ và lấy tích phân từng phần, ta có:

$$(\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{D})\mathrm{u},\varphi)=\sum_{|\mu|+k\le m}(a_{\mu,k}D_x^{\mu}D_t^{k}u,\varphi)$$

$$= \sum_{|\mu|+k\le m} (D_t^k u, D_x^\mu[\overline{a}_{\mu,k}\varphi])$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (D_t^k u, \varphi_k),$$

trong đó

$$\varphi_k = \sum_{|\mu|\le m-k} [D_x^\mu[\overline{a}_{\mu,k}\varphi],$$

và $$\big(h(x,t), k(x,t)\big) = \int_{\sigma_R} h(x,t)\overline{k(x,t)}dxdt$$

là tích vô hướng trong $L^2(\sigma_R)$.

Ta có:

$$(\mathrm{P}(\mathrm{x,t,D})\mathrm{u},\varphi) = (u, P'(x,t,D)\varphi) - i\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\int_{\partial_0\sigma_R} D_t^{j-1}u\overline{D_t^{k-j}\varphi_k}dx$$

$$= (u, P'(x,t,D)\varphi) - i\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\sigma_R} D_t^{j-1}u\sum_{k=j}^{m}\overline{D_t^{k-j}\varphi_k}dx,$$

trong đó toán tử $P'(x,t,D)$ được định nghĩa bởi công thức sau:

$$P'(x,t,D)\varphi = \sum_{|\mu|+k\le m} D_x^\mu \mathrm{D}_t^k[\overline{a}_{\mu,k}\varphi]$$

là toán tử liên hợp của P(x,t, D). Theo đó, ta có:

$$(P(x,t,D)u,\varphi) = (u, P'(x,t,D)\varphi) - i\sum_{j=1}^{m}\int_{\partial_0\sigma_R} D_t^{j-1}\overline{N_j\varphi}dx, \tag{1.4}$$

trong đó

$$N_j\varphi = \sum_{k=0}^{m-j}\sum_{|\mu|\le m-j-k} D_x^\mu D_t^k[\overline{a}_{\mu,j+k}\varphi] \qquad 1\le j\le m. \tag{1.5}$$

Nếu φ cũng thỏa mãn điều kiện

$$D_t^k\varphi(x,0) = 0 \qquad |x| < R \qquad 0\le k < r \tag{1.6}$$

thì từ các điều kiện (1.3) và (1.6) ta có:

$$(\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{D})\mathrm{u},\varphi) = (u, P'(x,t,D)\varphi).$$

Từ các dẫn dắt ở trên ta đưa ra khái niệm nghiệm yếu của Bài toán (1.2), (1.3) như sau:

Định nghĩa 1.1 *Hàm số* $u(x,t) \in L^2(\sigma_R)$ *được gọi là nghiệm yếu của Bài toán (1.2), (1.3) nếu với mọi* $\varphi(x,t) \in C^m(\overline{\sigma}_R)$ *triệt tiêu trong lân cận của* $\partial_1\sigma_R$ *và thỏa mãn (1.6) ta có*

$$\left(u, P'(x,t,D)\varphi\right) = \left(f, \varphi\right). \tag{1.7}$$

1.2 Điều kiện cần và đủ để tồn tại nghiệm yếu

Định lý 1.1 *Điều kiện cần và đủ cho bài toán (1.2), (1.3) có nghiệm yếu là bất đẳng thức sau được thỏa mãn*

$$\left|(f,\varphi)\right| \le C\left\|P'(x,t,D)\varphi\right\| \tag{1.8}$$

với mọi $\varphi \in C^m(\overline{\sigma}_R)$ *mà bằng không trong lân cận của* $\partial_1\sigma_R$ *và thỏa mãn (1.6)* trên $\partial_0\sigma_R$, *trong đó* $\|.\|$ *là chuẩn trong không gian* $L^2(\sigma_R)$.

Chứng minh

Nếu *u* thỏa mãn phương trình (1.7), ta có:

$$\left|(f,\varphi)\right| = \left|\left(u, P'(x,t,D)\varphi\right)\right| \le \|u\|.\left\|P'(x,t,D)\varphi\right\|$$

đối với tất cả $\varphi \in C^m(\overline{\sigma}_R)$ đã triệt trong lân cận $\partial_1\sigma_R$ và thỏa mãn điều kiện (1.6), do đó (1.8) là điều kiện cần cho sự tồn tại nghiệm của Bài toán (1.2), (1.3) được thỏa mãn với $C = \|u\|$.

Ta chứng minh điều kiện đủ: