ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Trần Thu Hiền

NỘI SUY NEWTON VÀ BÀI TOÁN BIÊN HỖN HỢP THỨ NHẤT CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Một số kí hiệu dùng trong luận văn

Trong luận văn có sử dụng một số kí hiệu sau đây:
+ $L(X)$: tập tất cả các toán tử tuyến tính tác động trong X
+ $domA$: miền xác định của tập A
+ $L_0(X) = A \in \ L(X) : domA = X$
+ $R(X)$: tập tất cả các toán tử khả nghịch phải trong $domA$
+ $\mathcal{R}_D$: tập tất cả các toán tử khả nghịch phải của $D \in R(X)$.

Mở đầu

Lý thuyết nội suy và các vấn đề liên quan là một lĩnh vực tuy không mới nhưng luôn là chuyên đề được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Nó không chỉ quan trọng đối với toán học, đặc biệt là đối với chuyên ngành Đại số và Giải tích mà nó còn làm công cụ để giải quyết nhiều vấn đề của thực tiễn cuộc sống.

Trong toán học, có rất nhiều cách để xác định được một hàm số nhưng để xác định được chính xác một hàm số mà chỉ nhờ vào một số giá trị rời rạc của hàm số đó và đạo hàm của nó thì phương pháp nội suy là hữu hiệu nhất mà trong đó phải kể đến bài toán nội suy Taylor và nội suy Newton:

Bài toán nội suy Taylor. Hãy xác định đa thức $N(x)$ có bậc không quá n ($\deg N(x) \leq n$) và thỏa mãn các điều kiện

$$N^{(i)}(x_0) = a_i,\ \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Bài toán nội suy Newton. Hãy xác định đa thức $N(x)$ có bậc không quá n ($\deg N(x) \leq n$) và thỏa mãn các điều kiện

$$N^{(i)}(x_i) = a_i,\ \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Từ bài toán nội suy Taylor và nội suy Newton, ta có thể phát triển để nghiên cứu về phương trình vi phân - một vấn đề được đề cập rất nhiều trong chương trình toán phổ thông cũng như chương trình toán ở các trường cao đẳng, đại học với bài toán Cauchy (bài toán ban đầu) và biên hỗn hợp thứ nhất như sau

Bài toán Cauchy. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(n-i)}(t) = y(t),$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$x^{(i)}(t_0) = b_i,\ \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của phương trình vi phân. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(n-i)}(t) = y(t)$$

thỏa mãn điều kiện sau

$$x^{(j)}(t_j) = b_j, \;\; j = 0, 1, \dots, n.$$

Trong thực tiễn, phương trình vi phân có rất nhiều ứng dụng. Chúng ta có thể nghiên cứu về sự gia tăng dân số, về sự phân rã phóng xạ, về sự nóng lên hoặc nguội đi của vật thể. . . .

Với những lí do trên đây nên tác giả chọn: "Nội suy Newton và bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của phương trình vi phân" làm đề tài nghiên cứu luận văn tốt nghiệp.

Khi thực hiện luận văn này tác giả thấy được việc nghiên cứu là hữu ích đối với bản thân, trước hết là hình thành và rèn luyện cho người viết kĩ năng cũng như kinh nghiệm nghiên cứu một vấn đề khoa học. Đồng thời người viết luôn được trau dồi và cập nhật những kiến thức mới. Ngoài ra luận văn còn là tài liệu tham khảo, nghiên cứu cho các học viên cao học, giảng viên cũng như sinh viên các trường trong cả nước.

Ngoài mục lục, lời nói đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn bao gồm 3 chương như sau

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này ngoài phần đầu nhắc lại khái niệm và các tính chất liên quan đến đa thức đại số là ba phần: phần thứ nhất trình bày về công thức nội suy Taylor, phần thứ hai trình bày về bài toán và công thức nội suy Newton, phần thứ ba đưa ra khai triển Taylor-Gontcharov và chứng minh các định lý làm nền tảng kiến thức cho các chương sau.

Chương 2. Bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của phương trình vi phân

Chương này là phần chính của luận văn, tác giả trình bày bài toán Cauchy và bài toán biên hỗn hợp thứ nhất trừu tượng. Sau đó áp dụng khảo sát bài toán Cauchy và bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của phương trình vi phân.

Chương 3. Ví dụ áp dụng

Trong chương này, tác giả đưa ra các ví dụ điển hình để làm minh họa cụ thể cho bài toán Cauchy và bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của phương trình vi phân đã đề cập trong Chương 2.

Tác giả đã tiến hành nghiên cứu, phân tích khá kỹ các tài liệu có liên quan rồi từ đó tập trung đánh giá, tổng hợp lại để làm nền tảng kiến thức cho luận văn. Nhưng do lần đầu tiên làm quen với việc nghiên cứu khoa học, mặc dù đã có rất nhiều cố gắng, song do hạn chế nhiều về mặt thời gian, kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu nên luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo, bổ sung của các thầy cô giáo cũng như sự quan tâm của các bạn bè đồng nghiệp để luận văn ngày càng hoàn thiện hơn.

Hoàn thành được luận văn này, tác giả xin được chân thành cảm ơn thầy giáo **GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU** là người trực tiếp hướng dẫn và đã tận tình giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian thực hiện luận văn. Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy, cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học.

Xin cảm ơn các anh chị đồng nghiệp, các anh chị đồng môn là những người luôn ủng hộ, động viên và tạo điều kiện cho tôi trong thời gian hoàn thành luận văn.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Ở phần này, ta nhắc lại các kiến thức về đa thức đại số.

*) Đa thức đại số và các tính chất liên quan.

Định nghĩa 1.1 (xem [1])**.** Cho vành A là một vành giao hoán có đơn vị. Ta gọi đa thức bậc n biến x là một biểu thức có dạng

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \;\; (a_n \neq 0)$$

trong đó các $a_i \in A$ được gọi là hệ số, a_n là hệ số bậc cao nhất và a_0 là hệ số tự do của đa thức.

Nếu $a_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ và $a_0 \neq 0$ thì ta có bậc của đa thức là 0.

Nếu $a_i = 0, \forall i = 0, 1, \ldots, n$ thì ta coi bậc của đa thức là $-\infty$ và gọi là đa thức không (nói chung thì người ta không định nghĩa bậc của đa thức không). Tập hợp tất cả các đa thức với hệ số lấy trong vành A được kí hiệu là $A[x]$.

Khi $A = K$ với K là một trường thì vành $K[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta thường xét $A = \mathbb{Z}$ hoặc $A = \mathbb{Q}$ hoặc $A = \mathbb{R}$ hoặc $A = \mathbb{C}$. Khi đó ta có các vành đa thức tương ứng là $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Định nghĩa 1.2 (xem [1])**.** Cho hai đa thức

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Ta định nghĩa các phép tính số học

$$\begin{aligned} &f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0, \\ &f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0, \\ &f(x)g(x) = c_{2n}x^{2n} + c_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \end{aligned}$$

trong đó

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0, \;\; k = 0, 1, \ldots, n.$$

Định lý 1.1 (xem [1]). *Giả sử A là một trường, $f(x)$ và $g(x) \neq 0$ là hai đa thức của vành $A[x]$, thế thì bao giờ cũng có cặp đa thức duy nhất $g(x)$ và $r(x)$ thuộc $A[x]$ sao cho*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \text{ với } \deg r(x) < \deg g(x).$$

Nếu $r(x) = 0$ ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Giả sử $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ là đa thức tùy ý của vành $A[x]$, a là phần tử tùy ý của vành A, phần tử $f(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0$ có được bằng cách thay x bởi a được gọi là giá trị của $f(x)$ tại a.
Nếu $f(a) = 0$ thì ta gọi a là nghiệm của $f(x)$. Bài toán tìm các nghiệm của $f(x)$ trong A gọi là giải phương trình đại số bậc n

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ \ (a_n \neq 0)$$

trong A.

Định lý 1.2 (xem [1]). *Giả sử A là một trường, $a \in A$ và $f(x) \in A[x]$. Dư số của phép chia $f(x)$ cho $x - a$ chính là $f(a)$.*

Định lý 1.3 (xem [1]). *Số a là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $x - a$.*

Giả sử A là một trường, $a \in A$ và $f(x) \in A[x]$ và m là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó a là nghiệm bội cấp m của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x-a)^{m+1}$.

Trong trường hợp $m = 1$ thì ta gọi a là nghiệm đơn còn khi $m = 2$ thì a được gọi là nghiệm kép. Số nghiệm của một đa thức là tổng số nghiệm của đa thức đó kể cả bội của các nghiệm (nếu có). Vì vậy người ta coi một đa thức có một nghiệm bội cấp m như một đa thức có m nghiệm trùng nhau.

Định lý 1.4 (xem [1]). *Mỗi đa thức thực bậc n đều có không quá n nghiệm thực.*

Hệ quả 1.1. *Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.*

Hệ quả 1.2. *Nếu đa thức $f(x)$ có* deg $\leq n$ *mà nhận cùng một giá trị như nhau tại $n+1$ điểm phân biệt của đối số thì đó là đa thức hằng.*

Hệ quả 1.3. *Hai đa thức có* deg $\leq n$ *mà nhận $n+1$ giá trị trùng nhau tại $n+1$ điểm phân biệt của đối số thì chúng đồng nhất bằng nhau.*

Định lý 1.5 (xem [1]). *Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ bậc n có đúng n nghiệm (tính cả bội của nghiệm).*

Định lý 1.6 (xem [1]). *Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc n và có hệ số chính (hệ số bậc cao nhất) $a_n \neq 0$ đều có thể phân tích (duy nhất) thành nhân tử dạng*

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - d_i) \prod_{k=1}^{s} \left(x^2 + b_k x + c_k\right)$$

với $d_i,\ b_k,\ c_k \in \mathbb{R}$, $2s + m = n$, $b_k^2 - 4c_k < 0$, $l,\ m,\ n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Công thức nội suy Taylor

Bây giờ, ta chuyển sang xét bài toán nội suy Taylor.

Bài toán 1.1 (Bài toán nội suy Taylor, xem [2]). Cho $x_0, a_k \in \mathbb{R}$ với $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Hãy xác định đa thức $T(x)$ bậc không quá $N-1$ (tức là $\deg T(x) \leqslant N-1$) và thỏa mãn các điều kiện

$$T^{(k)}(x_0) = a_k,\ \ \forall k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Giải. Ta dễ thấy rằng mọi đa thức đều viết được dưới dạng

$$T(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (x - x_0)^k$$

có $\deg T(x) \leqslant N-1$.
Ta cần đi xác định các hệ số $\alpha_k \in \mathbb{R}$ sao cho $T(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$T^{(k)}(x_0) = a_k,\ \ \forall k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Lần lượt lấy đạo hàm $T(x)$ đến cấp thứ k, $\ k = 0, 1, \ldots, N-1$, tại $x = x_0$ và sử dụng giả thiết

$$T^{(k)}(x_0) = a_k,\ \ \forall k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

ta suy ra

$$\alpha_k = \frac{a_k}{k!},\ \ \forall k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Thay giá trị của α_k vào biểu thức của $T(x)$, ta thu được

$$T(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k. \tag{1.1}$$

Với mỗi $k = 0, 1, \ldots, N-1$, ta có

$$T^{(k)}(x) = a_k + \sum_{j=k+1}^{N-1} \frac{a_j}{(j-k)!}(x-x_0)^{j-k}.$$

Do vậy đa thức $T(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$T^{(k)}(x_0) = a_k,\ \ \forall k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Cuối cùng, ta phải chứng minh đa thức $T(x)$ nhận được từ (1.1) là đa thức duy nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán nội suy Taylor (1.1), và ta gọi đa thức này là đa thức *nội suy Taylor*.

Thật vậy, nếu có đa thức $T^*(x)$, có bậc $\deg T^*(x) \leqslant N-1$ cũng thỏa mãn điều kiện của bài toán (1.1) thì khi đó, đa thức

$$P(x) = T(x) - T^*(x)$$

cũng có bậc $\deg P(x) \leqslant N-1$ và đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$P^{(k)}(x_0) = 0,\ \ \forall k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

tức là, đa thức $P(x)$ là đa thức có bậc không quá $N-1$ ($\deg P(x) \leqslant N-1$) mà lại nhận x_0 làm nghiệm với bội không nhỏ thua N, nên $P(x) \equiv 0$, và do đó $T(x) = T^*(x)$.

Nhận xét 1.1. Chú ý rằng đa thức nội suy Taylor $T(x)$ được xác định từ (1.1) chính là khai triển Taylor đến cấp thứ $N-1$ của đa thức $T(x)$ tại điểm $x = x_0$.

1.2 Công thức nội suy Newton

Bài toán 1.2 (Bài toán nội suy Newton, xem [2])**.** Cho x_i, $a_i \in \mathbb{R}$ với $i = 0, 1, \ldots n$. Hãy xác định đa thức $N(x)$ có bậc không quá n ($\deg N(x) \le n$) và thỏa mãn các điều kiện

$$N^{(i)}(x_i) = a_i, i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Giải. Dễ dàng chứng minh các đẳng thức sau đây

$$N(x) = N(x_0) \quad + \int\limits_{x_0}^{x} N'(t_1)\, dt_1,$$