ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-------------☙ ❄ ❧------------

NGUYỄN ĐĂNG HUY

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÉC TƠ VÀ ÁP DỤNG

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Mở đầu **1**

Nội dung **3**

1 MỘT SỐ KIẾN THỨC CỦA GIẢI TÍCH HÀM VÀ GIẢI TÍCH LỒI **4**

1.1 Định lí Ljusternik cho C^1 ánh xạ và định lí ánh xạ mở cho quá trình lồi 4

1.2 Định lí tách các tập lồi 17

2 ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÉC TƠ **21**

2.1 Điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ khả vi Fréchet 21

2.2 Điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vecto 30

3 ÁP DỤNG **33**

3.1 Điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bất đẳng thức biến phân vecto 33

3.2 Điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu vecto 36

KẾT LUẬN **38**

TÀI LIỆU THAM KHẢO **39**

Mở đầu

Lớp các bài toán cân bằng véc tơ là một bộ phận quan trọng của giải tích phi tuyến. Bất đẳng thức biến phân véc tơ, bài toán tối ưu véc tơ, bài toán cân bằng Nash véc tơ và bài toán bù véc tơ là các trường hợp riêng của bài toán cân bằng véc tơ. Một đề tài quan trọng của bài toán cân bằng véc tơ là nghiên cứu các điều kiện tối ưu cho các nghiệm hữu hạn của chúng.

Bằng cách sử dụng một tổng quát hóa của định lí Ljusternik, định lí ánh xạ mở cho quá trình lồi và các định lí tách các tập lồi, X.H. Gong(2012) đã thiết lập các điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ có ràng buộc nón với các giả thiết về tính khả vi của các hàm dữ liệu, trong đó không đòi hỏi nón thứ tự trong không gian mục tiêu có phần trong khác rỗng. Đây là một đề tài thời sự được nhiều tác giả nghiên cứu. Chính vì thế, tôi chọn đề tài " Điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ và áp dụng " .

Luận văn trình bày các kết quả của X.H.Gong(2012) về điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ có ràng buộc nón và các áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân véc tơ và bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc nón.

Luận văn này bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1. Một số kiến thức của giải tích hàm và giải tích lồi, trình bày một số kiến thức quan trọng của giải tích hàm và giải tích lồi bao gồm một tổng quát hóa các định lí Ljusternik cho C^1 - ánh xạ, định lí ánh xạ mở cho quá trình lồi và các định lí tách các tập lồi.

Chương 2. Điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ, trình bày các điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ khả vi Fréchet trên cơ sở một mở rộng của định lí Ljusternik cho C^1 - ánh xạ định lí ánh xạ mở cho quá trình lồi và các định lí tách các tập lồi. Chương 2 cũng trình bày các điều kiện đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ với các giả thiết về tính lồi của các hàm dữ liệu.

Chương 3. Áp dụng, trình bày các điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán bất đẳng thức biến phân véc tơ và bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc nón dựa trên các kết quả đã trình bày trong chương 2 cho bài toán cân bằng véc tơ.

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Đỗ Văn Lưu trong suốt thời gian làm luận văn, em xin bày tỏ lòng kính trọng và sự biết ơn sâu sắc đến thầy. Tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô giáo phản biện đã đọc và đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho luận văn, các thầy cô giáo Khoa Toán- Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, những người đã tạo điều kiện thuận lợi và động viên tôi hoàn thành luận văn này.

Do thời gian còn nhiều hạn chế nên khóa luận không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý từ thầy cô và các bạn.

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2014.

Tác giả

Nguyễn Đăng Huy

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CỦA GIẢI TÍCH HÀM VÀ GIẢI TÍCH LỒI

Trình bày một số kiến thức của giải tích hàm và giải tích lồi bao gồm một tổng quát hóa các định lí Ljusternik cho C^1 - ánh xạ, định lí ánh xạ mở cho quá trình lồi và các định lí tách các tập lồi.

1.1 Định lí Ljusternik cho C^1 ánh xạ và định lí ánh xạ mở cho quá trình lồi

Giả sử X, Y và Z là không gian Banach thực, $C \subset Y$ và $K \subset Z$ là các nón nhọn lồi đóng với $\operatorname{int} K \neq \phi$, trong đó $\operatorname{int} K$ là kí hiệu phần trong của tập K.

Giả sử Y^* và Z^* là các không gian đối ngẫu tôpô của Y và Z tương ứng. Đặt

$$C^* = \{y^* \in Y^* : y^*(y) \geqslant 0\,, \forall y \in C\}$$

và

$$K^* = \{z^* \in Z^* : z^*(z) \geqslant 0\,, \forall z \in K\}$$

là các nón đối ngẫu của C và K, tương ứng. Kí hiệu tựa phần trong của C^*

là $C^{\#}$,

$$C^{\#} = \{y^* \in Y^* : y^*(y) > 0, \forall y \in C \setminus \{0\}\}.$$

Giả sử $S \subset X$ là tập con lồi mở khác rỗng, và các ánh xạ

$$F : S \times S \to Y, \; g : S \to Z$$

Định nghĩa tập ràng buộc

$$A = \{x \in S : g(x) \in -K\},$$

và xét bài toán cân bằng véc tơ có ràng buộc (kí hiệu là (VEPC)):
Tìm $x \in A$ sao cho

$$F(x, y) \notin -P \setminus \{0\} \;, \forall y \in A,$$

trong đó P là một nón lồi trong Y.

Định nghĩa 1.1.

Véc tơ $x \in A$ thỏa mãn

$$F(x; y) \notin -C \setminus \{0\} \;, \forall y \in A,$$

được gọi là một nghiệm hữu hiệu của (VEPC).

Giả sử $L(X, Y)$ là không gian của tất cả các ánh xạ tuyến tính bị chặn từ X vào Y. (VEPC) bao hàm như một trường hợp đặc biệt bất đẳng thức biến phân véc tơ có ràng buộc (Kí hiệu là (VVIC)),

$$F(x, y) = (Tx)(y - x), \quad x, y \in S,$$

ở đây T là ánh xạ từ S vào $L(X, Y)$.

Định nghĩa 1.2.

Nếu $F(x;y) = (Tx)(y-x), \quad x,y \in S$, *và nếu* $x \in A$ *là một nghiệm hữu hiệu của (VEPC), thì* $x \in A$ *được gọi là nghiệm hữu hiệu của (VVIC).*

Trường hợp đặc biệt khác của (VEPC) là bài toán tối ưu véc tơ có điều kiện (kí hiệu là (VOPC)) trong đó

$$F(x,y) = f(y) - f(x), \quad x,y \in S,$$

với ánh xạ $f : S \to Y$ *.*

Định nghĩa 1.3.

Nếu $F(x,y) = f(y) - f(x),\ x,y \in S$, *và nếu* $x \in A$ *là một nghiệm hữu hiệu của (VEPC), thì* $x \in A$ *được gọi là một nghiệm hữu hiệu của (VOPC).*

Định nghĩa 1.4.

Giả sử X *là một không gian tuyến tính thực, và* Y *là một không gian tôpô tuyến tính thực. Giả sử* S_2 *là một tập con khác rỗng của* X *và* $f : S_2 \to Y$, $\overline{x} \in S_2$. *Nếu với* $h \in X$ *nào đó, giới hạn*

$$f'(\overline{x})(h) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}(f(\overline{x} + \lambda h) - f(\overline{x}))$$

tồn tại, thì $f'(\overline{x})(h)$ *được gọi là đạo hàm Gâteaux của* f *tại* $\overline{x}$ *theo phương* h. *Nếu giới hạn này tồn tại với mỗi phương* h, *thì ánh xạ* f *được gọi là ánh xạ khả vi Gâteaux tại* $\overline{x}$

Định nghĩa 1.5.

Giả sử X *và* Y *là không gian chuẩn và* D *là một tập con mở khác rỗng của* X. *Hơn nữa, giả sử ánh xạ* $f : D \to Y$ *với* $\overline{x} \in D$. *Nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục* $f'(\overline{x}) : X \to Y$ *với tính chất*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

thì $f'(\overline{x})$ *được gọi là đạo hàm Fréchet của* f *tại* $\overline{x}$ *và* f *được gọi là đạo hàm khả vi Fréchet tại* $\overline{x}$.

Nhận xét 1.1. *Nếu* f *khả vi Fréchet tại* $\overline{x}$*, thì* f *là khả vi Gâteaux tại* $\overline{x}$ *và đạo hàm Fréchet của* f *tại* $\overline{x}$ *bằng đạo hàm Gâteaux của* f *tại* $\overline{x}$ *theo mỗi phương* h.

Định nghĩa 1.6.

Giả sử X *và* Y *là các không gian tuyến tính thực,* C *là một nón lồi nhọn trong* Y*,* A *là một tập con lồi khác rỗng của* X*. Ánh xạ* $f : A \to Y$ *được gọi là* C*- lồi, nếu* $\forall x, y \in A$ *và* $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in C.$$

Định nghĩa 1.7.

Giả sử T *là ánh xạ đa trị từ* X *vào* Y *với* $T(x) \neq \phi, \forall x \in X$*.* T *được gọi là một quá trình lồi từ* $X \to Y$ *nếu*

(a) $Tx + Ty \subset T(x + y), \forall x, y \in X,$

(b) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall x \in X, \lambda > 0,$

(c) $0 \in T(0).$

Quá trình lồi $T : X \to Y$ *được gọi là đóng nếu* $\{(x, y) : y \in Tx\}$ *đóng trong* $X \times Y$.

Định lí sau đây là một tổng quát hóa của định lí Ljusternik.

Định lý 1.1.

Giả sử X và Y là không gian Banach thực, và cho $f : X \to Y$ là C^1 ánh xạ. Nếu $f'(\overline{x})(X) = Y$, thì với $x \in X$ có chuẩn $\|x\|$ đủ nhỏ, tồn tại $u \in X$ với $\|u\| = \circ(\|x\|)$ sao cho

$$f(\overline{x} + x + u) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x) = 0.$$

Để chứng minh một kết quả tương tự định lí 1.1, trước hết ta chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 1.1.

Giả sử X và Y là không gian Banach, S là tập hợp lồi mở khác rỗng của X, và ánh xạ: $f : S \to Y$, $\overline{x} \in S$, $h \in X$ với $L = \{\overline{x} + th : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset S$. Giả sử f khả vi liên tục Fréchet trên L. Khi đó,

$$f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) = \int\limits_0^1 f'(\overline{x} + th)(h)dt.$$

Chứng minh.

Kí hiệu không gian đối ngẫu tôpô của Y là Y^*.
Với $\overline{x} \in S$, $h \in X$,$L = \{\overline{x} + th : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset S$ và $y^* \in Y^*$, ta xác định hàm giá trị thực

$$g(t) = y^* \circ f(\overline{x} + th),\ \ t \in [0, 1]\,.$$

Với mỗi $t \in [0; 1]$, ta có

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y^* f(\overline{x} + (t + \Delta t)h) - y^* f(\overline{x} + th)}{\Delta t} \\ &= y^* \circ f'(\overline{x} + th)(h). \end{aligned}$$

Theo công thức Newton-Leibniz, ta có

$$\begin{aligned} y^*(f(\bar{x}+h)-f(\bar{x}) &= g(1)-g(0) \\ &= \int_0^1 g'(t)dt \\ &= y^*(\int_0^1 f'(\bar{x}+th)(h)dt \\ &= y^*(\int_0^1 f'(\bar{x}+th)(h)dt) \end{aligned}$$

Do tính bất kì của $y^* \in Y^*$ nên

$$f(\overline{x}+h)-f(\overline{x}) = \int_0^1 f'(\overline{x}+th)(h)dt.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bây giờ ta trình bày một mở rộng của định lí 1.1

Định lý 1.2.

Giả sử X và Y là các không gian Banach thực, giả sử S là một tập con lồi mở của X, và $f : S \to Y$ là khả vi liên tục Fréchet trong một lân cận của $\overline{x} \in S$. Nếu $f'(\overline{x})(X) = Y$, thì với bất kì $x \in X$ với $\|x\|$ đủ nhỏ, tồn tại $u \in X$ với $\|u\| = \circ(\|x\|)$ sao cho

$$f(\overline{x}+x+u)-f(\overline{x})-f'(\overline{x})(x) = 0$$

Chứng minh.

Đặt

$$X_0 = \{x \in X : f'(\overline{x})(x) = 0\}.$$

Do $f'(\overline{x})$ liên tục, X_0 là không gian con tuyến tính đóng của X.