ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VIỆT HỒNG

PHÉP VÔ HƯỚNG HÓA VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÉC TƠ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VIỆT HỒNG

PHÉP VÔ HƯỚNG HÓA VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÉC TƠ

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60. 46. 01. 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học:
PGS. TS Đỗ Văn Lưu

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Mở đầu

Trong những năm gần đây, bài toán cân bằng véc tơ thu hút nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu do phạm vi áp dụng rộng rãi của nó (xem [3]-[7], [9], [12] và các tài liệu tham khảo trong các bài báo đó). Lớp các bài toán cân bằng véc tơ bao hàm các lớp bài toán sau đây như các trường hợp đặc biệt: bài toán bất đẳng thức biến phân véc tơ, bài toán tối ưu véc tơ, bài toán cân bằng Nash véc tơ, bài toán bù véc tơ, ... Người ta nghiên cứu các bài toán cân bằng về sự tồn tại nghiệm, điều kiện tối ưu, cấu trúc tập nghiệm, phương pháp giải, ... Các loại nghiệm của bài toán cân bằng véc tơ thường được nghiên cứu là: nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu, nghiệm hữu hiệu Henig, nghiệm hữu hiệu toàn cục và nghiệm siêu hữu hiệu.

Để dẫn các điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng véc tơ người ta dùng phương pháp vô hướng hóa. X.H. Gong ([4], 2010) đã thiết lập các kết quả về vô hướng hóa cho nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu Henig, nghiệm hữu hiệu toàn cục của bài toán cân bằng véc tơ. Từ các kết quả về vô hướng hóa, X.H. Gong ([4]) đã dẫn các điều kiện cần tối ưu cho các nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu Henig, nghiệm hữu hiệu toàn cục và nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ có ràng buộc tập. Khi đưa vào giả thiết về tính lồi, tác giả dẫn các điều kiện đủ tối ưu cho các loại nghiệm hữu hiệu đó. Các kết quả đó được áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân véc tơ và bài toán tối ưu véc tơ. Đây là đề tài thời sự đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Chính vì thế em chọn đề tài: *"Phép vô hướng hóa và điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng véc tơ"*.

Luận văn trình bày các kết quả của X.H. Gong [4] về phép vô hướng hóa và các điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu Henig, nghiệm hữu hiệu toàn cục và nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ có ràng buộc tập cùng với các áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân véc tơ và bài toán tối ưu véc tơ.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: Một số kiến thức về dưới vi phân Clarke và dưới vi phân xấp xỉ.

Trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân Clarke và dưới vi phân xấp xỉ của Mordukhovich cho hàm Lipschitz địa phương.

Chương 2: Điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ.

Trình bày các kết quả của X.H. Gong [4] về phép vô hướng hóa cho các nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu Henig, nghiệm hữu hiệu toàn cục của bài toán cân bằng véc tơ. Từ các kết quả đó, chúng tôi trình bày các điều kiện cần cho các nghiệm hữu hiệu yếu, nghiệm hữu hiệu Henig, nghiệm hữu hiệu toàn cục và nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng véc tơ có ràng buộc tập dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke và dưới vi phân xấp xỉ của Mordukhovich cho hàm Lipschitz địa phương. Với các giả thiết về tính lồi của các hàm dữ liệu chúng tôi trình bày các điều kiện đủ tối ưu cho các loại nghiệm đó. Phần cuối chương trình bày các điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân véc tơ và bài toán tối ưu véc tơ dựa trên các kết quả cho bài toán cân bằng véc tơ.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS. TS Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành bản luận văn này. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy, cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học. Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học Toán K6A đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2014.

Người thực hiện

Nguyễn Thị Việt Hồng

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ DƯỚI VI PHÂN CLARKE VÀ DƯỚI VI PHÂN XẤP XỈ

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân Clarke và dưới vi phân xấp xỉ của Mordukhovich cho hàm Lipschitz địa phương. Các kiến thức trình bày trong chương này được tham khảo trong các tài liệu [1], [8], [10], [11].

1.1 Dưới vi phân Clarke

Giả sử X là không gian Banach, $f : X \to \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.1.

Giả sử X là không gian Banach, $f : X \to \mathbb{R}$.

a) Hàm f được gọi là Lipschitz địa phương tại $\overline{x} \in X$, hay Lipschitz ở gần $\overline{x}$, nếu tồn tại lân cận U của $\overline{x}$, số $K > 0$ sao cho

$$(\forall x, x' \in U) \ \ |f(x) - f(x')| \leqslant K\|x - x'\|. \tag{1.1}$$

Hàm f được gọi là Lipschitz địa phương trên tập $Y \subset X$, nếu f Lipschitz địa phương tại mọi $x \in Y$.

b) Hàm f được gọi là Lipschitz với hằng số Lipschitz K trên tập $Y \subset X$, nếu (1.1) đúng với mọi $x, x' \in Y$.

Định nghĩa 1.1.2.

Giả sử $F : X \to Y$, trong đó X và Y là các không gian Banach. Ánh xạ F được gọi là Lipschitz địa phương tại $\overline{x}$, nếu tồn tại số $\gamma > 0$ và số $K > 0$ sao cho

$$\|F(x') - F(x'')\|_Y \leqslant K\|x' - x''\|_X \quad (\forall x', x'' \in \overline{x} + \gamma B), \tag{1.2}$$

trong đó B là hình cầu đơn vị mở.

Định nghĩa 1.1.3.

Giả sử f là hàm Lipschitz địa phương tại $\overline{x} \in X$. Đạo hàm suy rộng Clarke của hàm f theo phương $v(\in X)$ tại $\overline{x}$, ký hiệu là $f^\circ(\bar{x}; v)$, được xác định như sau:

$$f^\circ(\bar{x}; v) = \limsup_{x \to \bar{x}; t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \tag{1.3}$$

trong đó $x \in X,\ t > 0$.

Sau đây là một số tính chất quan trọng của đạo hàm suy rộng Clarke.

Định lý 1.1.1.

Giả sử f là hàm Lipschitz địa phương với hằng số Lipschitz K tại x. Khi đó,

(i) Hàm $v \to f^\circ(x; v)$ hữu hạn, thuần nhất dương, dưới cộng tính trên X và

$$|f^\circ(x; v)| \leq K\|v\|;$$

(ii) $f^\circ(x; v)$ nửa liên tục trên theo (x, v); $f^\circ(x; .)$ Lipschitz (theo v) với hằng số K trên X;

(iii) $f^\circ(x; -v) = (-f)^\circ(x; v)$.

Định nghĩa 1.1.4.

Giả sử $f : X \to \mathbb{R}$ *là hàm Lipschitz địa phương trên không gian Banach* X, X^* *là không gian đối ngẫu của* X. *Gradient suy rộng Clarke, hay dưới vi phân Clarke của hàm* f *tại* $\bar{x}$, *ký hiệu bởi* $\partial f(\bar{x})$, *là tập hợp sau đây trong* X^*

$$\partial f(\bar{x}) := \{\xi \in X^* : f^\circ(\bar{x}; u) \geq \langle \xi, u \rangle, \ \forall u \in X\}.$$

Định lý sau đây trình bày một số tính chất quan trọng của dưới vi phân Clarke.

Định lý 1.1.2.

Giả sử f *là hàm Lipschitz địa phương với hằng số Lipschitz* K *tại* $\bar{x}$. *Khi đó,*

a) $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$, *lồi, compact* ***yếu trong* X^* *và*

$$\|\xi\|_* \leq K \quad (\forall \xi \in \partial f(\bar{x})),$$

trong đó $\|.\|_*$ *là chuẩn trong* X^*;

b) Với mọi $v \in X$, *ta có*

$$f^\circ(\bar{x}; v) = \max\{\langle \xi, v \rangle : \xi \in \partial f(\bar{x})\}.$$

Chứng minh.

$a)$ Theo định lý 1.1.1 suy ra $f^\circ(\bar{x}; .)$ dưới cộng tính, thuần nhất dương trên X. Theo định lý Hahn-Banach, tồn tại hàm tuyến tính $\zeta : X \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f^\circ(\bar{x}; v) \geq \langle \zeta; v \rangle \quad (\forall v \in X)$$

Từ đó suy ra $\zeta \in \partial f(\bar{x})$, và do đó $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Ta chứng minh $\partial f(\bar{x})$ lồi: lấy $\xi_1, \ \xi_2 \in \partial f(\bar{x}), \ 0 \leq \alpha \leq 1$. Khi đó,

$$f^\circ(\bar{x}; u) \geq \langle \xi_i, u \rangle \quad (\forall u \in X, \ i = 1, 2)$$

$$\Rightarrow f^\circ(\bar{x};u) = \alpha f^\circ(\bar{x};u) + (1-\alpha)f^\circ(\bar{x};u)$$
$$\geq \alpha\langle\xi_1, u\rangle + (1-\alpha)\langle\xi_2, u\rangle$$
$$= \langle\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2, u\rangle$$

$$\Rightarrow \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2 \in \partial f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}) \text{ lồi.}$$

Bây giờ chứng minh $\partial f(\bar{x})$ compact *yếu: với $\xi \in \partial f(\bar{x})$, $\|\xi\|_* \leq K \Rightarrow \partial f(\bar{x}) \subset \bar{B}_*(0,K)$, trong đó $\bar{B}_*(0,K)$ là hình cầu đóng tâm 0, bán kính K. Mà hình cầu $\bar{B}_*(0,K)$ là compact *yếu trong X^* (định lý Alaoglu), $\partial f(\bar{x})$ là đóng *yếu$\Rightarrow \partial f(\bar{x})$compact *yếu.

$b)$ Theo định nghĩa 1.1.4

$$\max\{\langle\xi, v\rangle : \xi \in \partial f(\bar{x})\} \leq f^\circ(\bar{x}, v).$$

Giả sử tồn tại v_0 sao cho

$$\max\{\langle\xi, v_0\rangle : \xi \in \partial f(\bar{x})\} \leq f^\circ(\bar{x}, v_0).$$

Theo định lý Hahn-Banach, tồn tại phiếm hàm tuyến tính ζ thỏa mãn

$$\langle\zeta, v\rangle \leq f^\circ(\bar{x}, v) \quad (\forall v \in X),$$

$$\langle\zeta, v_0\rangle = f^\circ(\bar{x}, v_0)$$

$$\Rightarrow \zeta \in \partial f(\bar{x}) \Rightarrow f^\circ(\bar{x}, v_0) > \langle\zeta, v_0\rangle = f^\circ(\bar{x}, v_0).$$

Vô lí (!). □

Sau đây ta trình bày các phép tính cho dưới vi phân Clarke.

Định lý 1.1.3.

Giả sử f là hàm Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, $s \in \mathbb{R}$. Khi đó,

$$\partial(sf)(\bar{x}) = s\partial f(\bar{x}).$$