ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO DUY HẢO

ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG TỔ HỢP

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO DUY HẢO

ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG TỔ HỢP

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Mở đầu

Ngay từ năm 1736, nhà toán học Euler đã giải quyết thành công bài toán tổ hợp về bảy cây cầu ở thành phố Königsberg, Đức (nay là Kaliningrad, Nga) nằm trên sông Pregel. Bài toán đặt ra là "Có thể đi theo một tuyến đường mà đi qua mỗi cây cầu đúng một lần rồi quay lại điểm xuất phát hay không?". Và kể từ đó trải qua nhiều thăng trầm của lịch sử, lí thuyết tổ hợp vẫn phát triển mạnh mẽ và có nhiều ứng dụng trong khoa học và trong cuộc sống. Chúng ta thường gặp các bài toán tổ hợp trong thực tế như: Lập lịch cho một cơ quan, Đặt các trạm xe bus tối ưu nhất trong thành phố, thuật toán tìm kiếm của Google, Yahoo, ... hay các phần mềm ứng dụng mà chúng ta vẫn đang sử dụng hàng ngày. Chính vì vậy, tổ hợp luôn dành được sự quan tâm rất lớn từ các nhà toán học, các thầy, cô giáo và các bạn học sinh yêu thích môn toán.

Toán tổ hợp là dạng toán khó thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố, cấp quốc gia, quốc tế. Mặc dù toán tổ hợp quan trọng như vậy nhưng các tài liệu về nó còn ít. Xuất phát từ thực tế đó, dưới sự định hướng và hướng dẫn nhiệt tình của GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, tôi đã tiến hành nghiên cứu về đề tài "Đẳng thức, bất đẳng thức và các bài toán cực trị trong tổ hợp" nhằm góp một phần nhỏ bé vào việc bổ sung tài liệu tham khảo cho giáo viên và học sinh.

Cấu trúc luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Tổ hợp và các hệ thức liên quan

Chương 2. Bất đẳng thức tổ hợp

Chương 3. Một số dạng toán cực trị trong tập rời rạc và tổ hợp.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu, thầy đã giúp tôi hiểu sâu hơn về các khái niệm, thuật toán liên quan đến đề tài của mình. Tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý thầy cô trong trường ĐH Khoa học- Đại học Thái Nguyên, các thầy ở Viện Toán học, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội đã tận tình giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho chúng tôi có những kiến thức cơ sở đủ vững để thực hiện đề tài.

Trong quá trình biên không tránh khỏi những sai sót, tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả để đề tài được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn.

Chương 1

Tổ hợp và các hệ thức liên quan

1.1. Nguyên lý Dirichlet và một số bài toán áp dụng

Nguyên lý Dirichlet (thuật ngữ tiếng Anh: *the pigeonhole principle*, cũng có nơi gọi là *the drawer principle*) - ở dạng đơn giản nhất - được phát biểu đầu tiên bởi G.Lejeune Dirichlet (1805-1859), một nhà toán học Đức gốc Pháp, như sau:

"Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng ($n \in \mathbb{N}^*$) thì luôn có (ít nhất là) hai con thỏ bị nhốt trong cùng một chuồng".

Một cách tổng quát, ta có nguyên lý Dirichlet mở rộng:

"Nếu nhốt m con thỏ vào n cái chuồng ($m, n \in \mathbb{N}^*$) thì luôn tồn tại một chuồng chứa ít nhất là $1 + \left[\dfrac{m-1}{n}\right]$ con thỏ".

Ở đây, ký hiệu $[a]$ được dùng để chỉ phần nguyên của số thực a tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Dùng phưng pháp phản chứng, ta có thể đưa ra một cách chứng minh khá ngắn gọn cho nguyên lý Dirichlet (ngay cả dưới dạng mở rộng); học sinh THPT cũng có thể làm được việc này; và điều đó không hề làm giảm đi giá trị của bản thân nguyên lý. Nguyên lý Dirichlet có rất nhiều ứng dụng (hiệu quả đến bất ngờ): sử dụng nó, ta có thể chứng minh được nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Chính vì vậy, tại các cuộc thi học sinh giỏi toán (quốc gia và quốc tế), nguyên lý Dirichlet thường xuyên được khai thác. Để minh hoạ, dưới đây, ta xét một số bài toán cụ thể.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên gồm toàn số 1 chia hết cho 2011.

Lời giải.

Xét dãy số gồm 2012 số hạng như sau: 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11..1}_{2012}$ Rõ ràng trong 2012 số này tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2011. Suy ra hiệu của chúng chia hết cho 2011. Giả sử hai số đó là $\underbrace{11..1}_{k-\,so}$ và $\underbrace{11..1}_{n-\,so}$.

Hiệu của hai số này là $\underbrace{11..1}_{n-k(\,so)}.10^k$ với $(n > k)$ Mà ta có $(2011,\, 10^k) = 1$.

Do đó $\underbrace{11..1}_{n-k(\,so)} \vdots 2011$.

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 1.2. [*Vô địch Cộng hoà Czech 1998*] Cho X là một tập hợp gồm 14 số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng có một số nguyên dương $k \leq 7$ và có hai tập con k-phần tử:

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_k\}, \{b_1; b_2; \ldots; b_k\}$$

rời nhau của X sao cho

$$\left|\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)-\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_k}\right)\right|< \frac{1}{1000}.$$

Lời giải.

Xét $C_{14}^7 = 3432$ tập con 7-phần tử của X. Tổng (các) nghịch đảo của các phần tử trong mỗi tập con này rõ ràng là không vượt quá $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{7} < 2,6$ nên phải thuộc vào một trong số 2600 nửa khoảng:

$$\left(\frac{0}{1000};\frac{1}{1000}\right],\left(\frac{1}{1000};\frac{2}{1000}\right],\ldots,\left(\frac{2599}{1000};\frac{2600}{1000}\right].$$

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai tập con khác nhau có tổng nghịch đảo các phần tử thuộc vào cùng một nửa khoảng. Loại bỏ khỏi hai tập con đó các phần tử chung (hai tập con 7-phần tử khác nhau thì có tối đa sáu phần tử chung), ta sẽ thu được hai tập con k-phần tử (với k nguyên dương, $k \leq 7$), thoả yêu cầu của bài toán: hiệu của hai tổng nghịch đảo các phần tử trong hai tập con này sẽ sai khác nhau ít hơn 1/1000.

Bài toán 1.3. [*VMO-2004*] Cho tập $A = \{1; 2; 3; ...; 16\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Lời giải.

Ta thấy, nếu a, b cùng chẵn thì $a^2 + b^2$ là hợp số. Do đó tập con X của A có hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố thì X không thể chỉ chứa các số chẵn. Suy ra $k \geq 9$. Ta chứng tỏ k = 9 là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Điều đó có nghĩa là với mọi tập con X gồm 9 phần tử bất kì luôn tồn tại hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố. Để chứng minh khẳng định trên ta chia tập A thành các cặp hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố, ta có tất cả 8 cặp

$(1; 4), (2; 3), (5; 8), (6; 11), (7; 10), (9; 16), (12; 13), (14; 15).$

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 9 phần tử của X có hai phần tử thuộc cùng một cặp và ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 1.4. [*Trích đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO, 1999*] Cho $\mathcal{A} = \{a_1; a_2; a_3; \cdots\} \subset \mathbb{N}^*$ thoả mãn điều kiện $1 \leq a_{p+1} - a_p \leq 1999$ với mọi $p \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại cặp chỉ số p, q với $p < q$ sao cho a_p / a_q.

Lời giải.

Đặt $A(1; j) := a_1 + j - 1$ với mọi j nguyên dương mà $j \leq 1999$ và bằng quy nạp, ta định nghĩa:

$$B_i := \prod_{k=1}^{1999} A(i-1; k), A(i; j) := B_i + A(i-1; j)$$

với mọi i, j nguyên dương mà $i \geq 2,\ j \leq 1999$. Từ cách xây dựng trên, dễ dàng chứng minh $A(m; j) < A(n; j),\ A(m; j)/A(n; j)$ với mọi bộ ba số nguyên dương m, n, j mà $j \leq 1999$ và $m < n$. Từ cách xây dựng trên, cũng dễ thấy (với mỗi $i \in \mathbb{N}^* :\ A(i; 1), A(i; 2), \ldots, A(i; 1999)$) là 1999 số nguyên dương liên tiếp (không bé hơn a_1) do đó, theo giả thiết của bài toán về tập hợp $\mathcal{A}$, thì tồn tại $j_i \in \mathbb{Z} \cap [1; 1999]$ để $A(i; j_i) \in \mathcal{A}$.

Bấy giờ, vì $j_1, j_2, \ldots, j_{2000} \in \mathbb{Z} \cap [1 : 1999]$, nên theo nguyên lý Dirichlet, có hai số nguyên dương $m < n \leq 2000$ mà $j_m = j_n =: j$; với chúng, ta tìm được cặp chỉ số $p < q$ sao cho

$$a_p = A(m; j_m) = A(m; j) | A(n; j) = A(n; j_n) = a_q \quad \text{(đpcm).}$$

Bài toán 1.5. [*Đề nghị, Toán 11, kỳ thi Olympic 30/4 năm 2006*] Gọi $\mathcal{A}$ là tập hợp tất cả các bộ ba $x = (x_1, x_2, x_3)$ mà $x_1, x_2, x_3 \in [0, 7] \cap \mathbb{Z}$. Bộ $x = (x_1; x_2; x_3) \in \mathcal{A}$ được gọi là trội hơn bộ $y = (y_1; y_2; y_3) \in \mathcal{A}$ nếu $x \neq y$ và $x_i \geq y_i$ với mọi $i \in \{1; 2; 3\}$; khi đó, ta viết $x > y$. Tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho mọi tập con n-phần tử của $\mathcal{A}$ đều chứa ít nhất là hai bộ x, y mà $x > y$.

Lời giải.

1/ Trước hết, xét tập hợp $\mathcal{B} := \{x \in \mathcal{A} | x_1 + x_2 + x_3 = 11\}$. Có thể kiểm tra trực tiếp rằng $\mathcal{B}$ là một tập con 48-phần tử của $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ gồm đúng: 4 phần tử có dạng $x = (0; x_2; 11 - x_2)$ với $4 \leq x_2 \leq 7$; 5 phần tử có dạng $x = (1; x_2; 10 - x_2)$ với $3 \leq x_2 \leq 7$; 6 phần tử có dạng $x = (2; x_2; 9 - x_2)$ với $2 \leq x_2 \leq 7$; 7 phần tử có dạng $x = (3, x_2, 8 - x_2)$ với $1 \leq x_2 \leq 7$; 8 phần tử có dạng $x = (4, x_2, 7 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 7$; 7 phần tử có dạng $x = (5; x_2; 6 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 6$; 6 phần tử có dạng $x = (6; x_2; 4 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 5$; và 5 phần tử có dạng $x = (7; x_2; 4 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 4$.

Rõ ràng $\mathcal{B}$ không chứa hai bộ x, y nào mà $x > y$.

2/ Tiếp theo, cho $\mathbb{N} \ni n \geq 49$, và $\mathcal{B}$ là một tập con n-phần tử bất kỳ của $\mathcal{A}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{B}$ chứa ít nhất hai bộ x, y mà $x > y$.

Muốn vậy, xét các tập con sau đây của $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{C}_1 := \{x \in \mathcal{A} | x_1 = 0 \vee x_2 = 7\}, \mathcal{C}_2 := \{x \in \mathcal{A} | (x_1 = 1 \vee x_2 \leq 6) \vee (x_1 \geq 1 \wedge x_2 = 6)\},$$

$$\mathcal{C}_3 := \{x \in \mathcal{A} | (x_1 = 2 \vee x_2 \leq 5) \vee (x_1 \geq 2 \wedge x_2 = 5)\},$$

$$\mathcal{C}_4 := \{x \in \mathcal{A} | (x_1 = 3 \wedge x_2 \leq 4) \vee (x_1 \geq 3 \wedge x_2 = 4)\}, \mathcal{C} := \bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{C}_i,$$

$$\mathcal{D} := \mathcal{A} \setminus \mathcal{C} \equiv \{x \in \mathcal{A} | x_1 \geq 4 \vee x_2 \leq 3\},$$

$$\mathcal{C}_{i,j} := \{x \in \mathcal{C}_i | x_3 = j\} \ (i, j \in \mathbb{Z}; 1 \leq i \leq 4;\ 0 \leq j \leq 7),$$

$$\mathcal{D}_{p,q} := \{x \in \mathcal{D} | x_1 = p, x_2 = q\} \ (p, q \in \mathbb{Z}; 4 \leq p \leq 7;\ 0 \leq q \leq 3);$$

và chỉ cần khảo sát hai trường hợp:

(i) Nếu $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ là một tập hợp có nhiều hơn 32 phần tử, thì do chỉ có 32 tập con $\mathcal{C}_{i,j}$ $(i, j \in \mathbb{Z}; 1 \leq i \leq 4;\ 0 \leq j \leq 7)$, tạo thành một "phân hoạch" của $\mathcal{C}$, nên theo nguyên lý Dirichlet, $\mathcal{B}$ phải chứa ít nhất là hai phần tử x và y $(x \neq y)$ của cùng một tập con $\mathcal{C}_{i,j}$ nào đó $(i, j \in \mathbb{Z};\ 1 \leq i \leq 4;\ 0 \leq j \leq 7)$; từ cấu trúc của $\mathcal{C}_{i,j}$

ta thấy x và y có thể so sánh được với nhau theo quan hệ "trội", mà ta có thể giả sử là $x > y$.

(ii) Nếu $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ có không quá 32 phần tử, thì $\mathcal{B} \cap \mathcal{D}$ chứa ít nhất $n - 32 \geq 17$ phần tử; nhưng chỉ có 16 tập con $\mathcal{D}_{p,q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}; 4 \leq p \leq 7;\ 0 \leq q \leq 3)$ tạo thành một "phân hoạch" của $\mathcal{D}$; nên vẫn theo nguyên lý Dirichlet, $\mathcal{B}$ phải chứa ít nhất là hai phần tử x và y $(x \neq y)$ của cùng một tập con $\mathcal{D}_{p,q}$ nào đó $(p, q \in \mathbb{Z}; 4 \leq p \leq 7;\ 0 \leq q \leq 3)$; từ cấu trúc của $\mathcal{D}_{p,q}$ ta thấy x và y có thể so sánh được với nhau theo quan hệ "trội", mà ta cũng có thể giả sử là $x > y$ (đpcm).

Từ 1/ và 2/, ta thấy: số tự nhiên bé nhất cần tìm là $n = 49$.

1.2. Ý tưởng và lời giải tường minh một số bài toán tổ hợp

Khi đọc đầu bài của các BTTH (Bài toán tổ hợp) thì học sinh đều có thể hiểu các giả thiết và kết luận khá dễ dàng, nhưng giải được chúng là điều khó khăn. Từ bảng kết quả điểm cho thấy số học sinh giải được điểm tối đa rất ít, điều đó chứng tỏ đây là loại bài toán khó, thậm chí có trong tay lời giải của tác giả ra bài toán đó thì không phải học sinh nào cũng hiểu đầy đủ và cặn kẽ lời giải. Những người tự giải bài toán đó bằng một cách khác thường hiểu được lời giải của tác giả một cách khá dễ dàng. Tại sao lại như vậy?

Một số BTTH thường đề cập một số yếu tố ràng buộc theo những quy tắc nào đó. Yêu cầu của bài toán là đánh giá một đại lượng nào đó liên quan đến các yếu tố đã đề cập, hoặc chứng minh một quy tắc nào đó luôn thực hiện được, hoặc chứng minh một quy luật nào đó nghiệm đúng.

Lược đồ tự nhiên để tiếp cận việc giải loại bài toán này đã được hình thành cho học sinh từ các lớp dưới gồm các bước:

1. Chọn ẩn để mô tả các yếu tố trong đầu bài thành một phương trình, một bất phương trình hoặc một hệ hỗn hợp chứa ẩn đã chọn.

2. Xử lý các điều vừa mô tả theo yêu cầu của bài toán bằng cách giải ra nghiệm hoặc biến đổi thành những kết quả giúp cho việc hình thành quy tắc hay quy luật thỏa yêu cầu bài toán.