ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ HOÀN

KẾT THỨC - BIỆT THỨC VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ HOÀN

KẾT THỨC - BIỆT THỨC VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên, Năm 2014

Lời nói đầu

Trong đời sống, khoa học kỹ thuật nói chung và toán học nói riêng, luôn luôn xuất hiện các phương trình, hệ phương trình. Việc nghiên cứu và giải tường minh chúng là một công việc có từ xa xưa và vẫn phát triển mạnh mẽ cho đến nay. Một trong những công cụ được nghiên cứu trong lĩnh vực này là kết thức.

Thuật ngữ RESULTANT (kết thức) được giới thiệu bởi Bézout trong "Histoire de I'Academie de Paris." Sau đó, Karl Fink cũng đã đưa ra khái niệm này trong "Geschichte der Elementar-Mathematik 1764" hay Salmon trong "Modern Higher Algebra 1859."

Ngày nay kết thức đã có mặt trong nhiều lĩnh vực của toán học và xa hơn là trong vật lý học. Trong chương trình bậc đại học, kết thức xuất hiện trong giáo trình Đại số sơ cấp, nhưng mới chỉ làm việc với hai đa thức một biến và một vài ứng dụng. Luận văn này được viết với mục đích chính là đi sâu vào khái niệm kết thức. Mở rộng từ trường hợp một biến thành nhiều biến. Hơn nữa, luận văn chỉ rõ việc áp dụng kết thức vào giải hệ phương trình đại số. Nội dung của luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1 trình bày những kiến thức chuẩn bị, những kết quả có liên quan đến các phần sau. Các kiến thức này là quen thuộc và có thể tìm trong nhiều tài liệu, tuy nhiên để tiện cho việc theo dõi luận văn tôi vẫn trình bày lại. Nội dung chính của chương này là việc xây dựng vành đa thức một biến, vành đa thức nhiều biến trên một vành giao hoán có đơn vị cho trước, vành Noether và chứng minh các định lý quan trọng Định lí cơ bản của Hilbert.

Chương 2 và chương 3 là nội dung chính của luận văn. Trong đó chương 2 tập trung xây dựng khái niệm kết thức và biệt thức. xây dựng khái niệm kết thức cho hai đa thức một biến, hai đa thức thuần nhất hai biến và cuối cùng là trường hợp n biến. Biểu diễn kết thức qua nghiệm và phép khử ẩn. Nội dung chính còn lại chứng minh mối liên hệ giữa kết thức và hệ phương trình đa thức . Trong phần này chứng minh định lý quan trọng, định lý Bézout về số giao điểm của các siêu mặt. Từ đó trình bày một số ứng dụng của kết thức trong giải hệ phương trình, tìm giao điểm cũng như biện luận số giao điểm của hai đồ thị. Định lý 3.3.1 là kết quả quan trọng nhất mà phần này trình bày. Nội dung của định lý mở ra cho chúng một phương pháp giải hệ phương trình đa thức. Giả thiết rằng chúng ta giải được mọi phương trình đa thức một biến, khi đó mọi hệ phương trình đa thức đều giải được.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quý thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn này.

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Phó giáo sư Tiến sĩ Đàm Văn Nhỉ. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của thầy trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các giáo sư, tiến sĩ đang công tác tại Viện toán học, Trường Đại học khoa học tự nhiên, trường Đại học sư phạm Hà Nội, trường Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức để nâng cao trình độ của mình. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới tất cả các thầy, cô.

Tác giả xin chân thành cám ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội , Ban giám hiệu, các tổ chức Đoàn thể, tổ Toán trường THPT Trương Định Hà Nội cùng bạn bè đồng nghiệp và gia đình đã tạo mọi điều kiện giúp đỡ, động viên tác giả hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2014
Tác giả

Hoàng Thị Hoàn

Mục lục

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Phần này tập trung vào việc trình bày cách xây dựng vành đa thức một biến, nhiều biến; chứng minh hai kết quả quan trọng: Nếu R là vành nhân tử hóa (tương ứng Noether) thì vành đa thức một biến, nhiều biến cũng là vành nhân tử hóa (tương ứng Noether).

1.1 Vành đa thức và nghiệm đa thức

1.1.1 Khái niệm vành đa thức một biến

Giả sử R là vành giao hoán với đơn vị 1. Ký hiệu $P \subset R^{\mathbb{N}}$ là tập tất cả các dãy $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ với các $a_i \in R$ và chỉ có một số hữu hạn thành phần khác 0, còn lại tất cả bằng 0. Vậy phần tử thuộc P hoặc có dạng $(0, \ldots, 0, 0, \ldots)$ hoặc $(a_0, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ với thành phần cuối cùng $a_n \neq 0$. Ta đưa phép toán vào P để biến P thành một vành. Với $f = (a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots), g = (b_0, \ldots, b_m, 0, \ldots) \in P$, định nghĩa:

$$\begin{aligned} f &= g \text{ khi và chỉ khi } a_i = b_i, i = 0, 1, 2, \ldots \\ f + g &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_k + b_k, \ldots, 0, \ldots) \\ f.g &= (a_0b_0, a_1b_0 + a_0b_1, a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2, \ldots, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Bổ đề 1.1.1. *Tập* $(P, +, .)$ *là một vành giao hoán với đơn vị* $(1, 0, 0, \ldots)$

và ánh xạ $\phi : R \to (P, +, .), a \mapsto (a, 0, 0, 0, \ldots)$, *là một đơn cấu.*

Đặt $x = x^1 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ và quy ước $x^0 = (1, 0, 0, \ldots)$. Ta biểu diễn

$$\begin{aligned}
x^0 &= (1, 0, 0, \ldots) \\
x &= (0, 1, 0, 0, \ldots) \\
x^2 &= (0, 0, 1, 0, \ldots) \\
x^3 &= (0, 0, 0, 1, \ldots) \\
\cdots &= \cdots \\
f &= (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \\
&= (a_0, 0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + \cdots + (0, 0, 0, \ldots, 0, a_n, 0, \ldots) \\
&= (a_0, 0, \ldots)x^0 + (a_1, 0, \ldots)x + \cdots + (a_n, 0, 0, \ldots)x^n.
\end{aligned}$$

Nếu đồng nhất $a \in R$ với ảnh $\phi(a) = (a, 0, 0, \ldots)$, $x^0 = (1, 0, 0, \ldots) = \phi(1)$ ta có biểu diễn $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$. Lúc này vành $(P, +, .)$ được ký hiệu qua $R[x]$ và ta có

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in R\} = \{\sum_{i=0}^{n} a_ix^i \mid a_i \in R\}.$$

Mỗi phần tử $f \in R[x]$ được gọi là một *đa thức* của x với các hệ số a_i thuộc vành R. Hệ số $a_n \neq 0$ được gọi là *hệ số cao nhất*, còn hệ số a_0 được gọi là *hệ số tự do* của f; n được gọi là *bậc* của đa thức f và được ký hiệu $\deg f(x)$. Riêng đa thức 0 được quy định có bậc là $-\infty$ hoặc -1. Vì tính chất đặc biệt của x, nên đôi khi ta gọi x là một *biến* trên R và đa thức f còn được viết qua $f(x)$. Hơn nữa, x và $a \in R$ là bình đẳng. Nếu $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i, g(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_ix^i \in R[x]$ thì

$$f(x) = g(x) \text{ khi và chỉ khi } m = n, a_i = b_i \text{ với mọi } 0 \leqslant i \leqslant n$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0} (a_i + b_i)x^i, f(x)g(x) = \sum_{i=0} (\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}b_j)x^i.$$

Ta có các kết quả sau đây:

Định lý 1.1.2. *$\mathbb{R}[x]$ là một vành giao hoán. Với trường các số thực $\mathbb{R}$, vành $\mathbb{R}[x]$ là một miền nguyên.*

Định lý 1.1.3. *Với các đa thức $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $g(x) \neq 0$ có hai đa thức duy nhất $q(x), r(x)$ sao cho $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ với $\deg r(x) < \deg g(x)$.*

Chứng minh: Ta chứng minh tính duy nhất của $q(x)$ và $r(x)$: Giả sử $f(x) = g(x)q'(x) + r'(x)$, với $\deg r'(x) < \deg g(x)$. Khi đó $0 = g(x)(q(x) - q'(x)) + r(x) - r'(x)$ hay $g(x)(q(x) - q'(x)) = r'(x) - r(x)$. Vì $\deg[r'(x) - r(x)] < \deg g(x)$ nên $r(x) = r'(x)$ và $q(x) = q'(x)$.
Tiếp theo, ta chỉ ra sự tồn tại của biểu diễn: Nếu $\deg g(x) > \deg f(x)$ thì $f(x) = 0.g(x) + f(x)$. Nếu $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$ thì ta dễ dàng chọn được một đa thức $h(x)$ sao cho $f_1(x) = f(x) - g(x)h(x)$ thỏa mãn $\deg f_1(x) < \deg f(x)$. Nếu $\deg f_1 < \deg g$ thì ta đã có $q(x) = h(x)$ và $r(x) = f_1(x)$. Nếu $\deg f_1(x) \geqslant \deg g(x)$ thì lặp lại quá trinh vừa rồi. Sau một số hữu hạn lần ta sẽ có được $q(x)$ và $r(x)$. □

1.1.2 Nghiệm đơn và nghiệm bội

Giả sử trường K là trường con của trường K^*. Với $\alpha \in K^*$ và đa thức $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$. Biểu thức $f(\alpha) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \in K^*$ được gọi là *giá trị* của $f(x)$ tại α trong K^*. Nếu $f(\alpha) = 0$ thì α được gọi là một *nghiệm* của $f(x)$ trong K^*. Giả sử số nguyên $m \geqslant 1$. Phần tử $\alpha \in K^*$ được gọi là một *nghiệm bội m* của $f(x)$ trong K^* nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x-\alpha)^{m+1}$ trong $K^*[x]$. Khi $m = 1$ thì α được gọi là *nghiệm đơn*.

Định lý 1.1.4. *Đa thức $f(x) \in K[x]$ bậc $n \geqslant 1$. Khi đó có kết quả:*

(i) *Nếu $\alpha \in K$ là nghiệm của $f(x)$ thì $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ với đa thức $g(x) \in K[x]$.*