ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

TRIỆU THỊ CẦN

HIỆU CHỈNH LẶP NEWTON-KANTOROVICH CHO PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỈNH PHI TUYẾN J-ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

Người hướng dẫn khoa học
GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Mở đầu

Trên thực tế, nhiều vấn đề khoa học, công nghệ, kinh tế, ... dẫn đến việc giải các bài toán mà nghiệm của chúng không ổn định theo dữ kiện ban đầu, tức là một thay đổi nhỏ của các dữ kiện dẫn đến sai khác rất lớn của nghiệm, thậm chí làm cho bài toán vô nghiệm hoặc vô định. Đó là những bài toán đặt không chỉnh. Do các số liệu thường được thu thập bằng thực nghiệm và được xử lý trên máy tính nên không tránh khỏi những sai số. Vì vậy, cần phải có những phương pháp giải ổn định các bài toán đặt không chỉnh sao cho khi sai số của dữ liệu càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát.

Do tầm quan trọng đặc biệt của lý thuyết này mà nhiều nhà toán học nước ngoài và Việt Nam đã dành phần lớn thời gian và công sức của mình cho việc nghiên cứu các phương pháp hiệu chỉnh để giải các bài toán đặt không chỉnh. Nội dung của luận văn này trình bày phương pháp hiệu chỉnh lặp Newton-Kantorovich cho phương trình không chỉnh phi tuyến J-đơn điệu trong không gian Banach. Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn bao gồm hai chương:

Trong chương 1 chúng tôi xin trình bày một số vấn đề cơ bản của không gian Banach và lý thuyết của bài toán đặt không chỉnh với toán tử đơn điệu.

Trong chương 2 chúng tôi trình bày lại một số kết quả của phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov và phương pháp hiệu chỉnh lặp Newton-Kantorovich cho phương trình không chỉnh phi tuyến J-đơn điệu trong không gian Banach.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong Khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo, Ban Giám hiệu nhà trường đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới GS.TS. Nguyễn Bường - Hiện đang công tác tại Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam - Người Thầy đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn. Tôi cũng bày tỏ lòng cảm ơn gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, khích lệ và giúp đỡ tôi quá trình học tập của mình.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của các Thầy, các Cô và các Độc giả quan tâm để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2014.

Người thực hiện

Triệu Thị Cần

Chương 1

Một số vấn đề cơ bản

Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản của giải tích hàm có liên quan đến nội dung nghiên cứu của luận văn. Các khái niệm này được tham khảo trong các tài liệu [1], [3] và [5].

1.1 Không gian Banach và ánh xạ J-đơn điệu

1.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.1. *Nếu không gian tuyến tính định chuẩn X là một không gian metric đầy đủ (với khoảng cách $d(x, y) = \|x - y\|$) thì X được gọi là không gian Banach hay không gian tuyến tính định chuẩn đầy đủ.*

Ví dụ 1.1. *Không gian Euclide n-chiều $\mathbb{R}^n$ là không gian Banach.*

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ chuẩn và khoảng cách được xác định như sau:

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2},$$

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

$$\big(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n\big).$$

Ví dụ 1.2. *Không gian $C[a, b]$ là tập tất cả các hàm giá trị thực liên tục trên khoảng đóng hữu hạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ là không gian Banach.*

Trong $C[a, b]$ chuẩn và khoảng cách xác định bởi:

$$\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|,$$

$$d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|,$$
$$x(t), y(t) \in C[a,b].$$

Ví dụ 1.3. *Không gian $C(S)$ là tập tất cả các hàm giá trị thực liên tục trên không gian Tôpô compact S là không gian Banach.*

Trong $C(S)$ chuẩn và khoảng cách được xác định như sau:

$$\|f\| = \max_{s\in S} |f(s)|,$$
$$d(f,g) = \sup_{s\in S} |f(s) - g(s)|,$$
$$f(s), g(s) \in C(S).$$

Ví dụ 1.4. *Không gian c_0 tập tất cả các dãy số $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ hội tụ tới 0 và không gian l_∞ tập tất cả các dãy số $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ thỏa mãn $\sup_n |\xi_n| < \infty$ là các không gian Banach.*

Trong không gian c_0 và không gian l_∞ chuẩn và khoảng cách được xác định bởi:

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|,$$
$$d(x,y) = \sup_n |\xi_n - \eta_n|,$$
$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

Ta sẽ chứng minh cho không gian c_0, đối với không gian l_∞ chứng minh tương tự.

Giả sử $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ là một dãy Cauchy trong c_0, trong đó $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots)$ có nghĩa là $\forall \epsilon > 0, \exists m_0, \forall m \geq m_0, \forall p$ nguyên dương,

$$\|x_m - x_{m+p}\| \leq \epsilon.$$

Vì $\|x\| = \sup_n |\xi_n^{(m)}|$ nên $|\xi_n^{(m)} - \xi_n^{(m+p)}| \leq \epsilon, \forall n$. Do đó khi n cố định $\{\xi_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ là một dãy số Cauchy $\Rightarrow$ tồn tại ξ_n^0 sao cho

$$\xi_n^0 = \lim_{m\to\infty} \xi_n^{(m)}.$$

Cho $p \to \infty$ ta thu được:

$$|\xi_n^{(m)} - \xi_n^0| \leq \epsilon, \forall n.$$

Vì $\lim \xi_n^{(m_0)} = 0$ khi $n \to \infty$ nên $\exists n_0, \forall n \geq n_0$ sao cho $|\xi_n^{(m_0)}| < \epsilon$. Do đó $\forall n \geq n_0, |\xi_n^0| \leq |\xi_n^{(m_0)}| + |\xi_n^{(m_0)} - \xi_n^0| \leq 2\epsilon$.

$$\Rightarrow x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots) \in c_0$$

$$\Rightarrow \|x_m - x_0\| \leq \epsilon, m \geq m_0$$

$$\Rightarrow x_0 = \lim_{m\to\infty} x_m.$$

Vậy, c_0 là không gian Banach.

Ví dụ 1.5. *$l_p, (p \geq 1)$ tập các dãy số $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ thỏa mãn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$$

là không gian Banach.

Trong không gian $l_p, (p \geq 1)$ chuẩn và khoảng cách được xác định như sau:

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|x - y\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in l_p, (p \geq 1).$$

Giả sử $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong l_p, trong đó $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots)$. Cho nên $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ m_0$, $\forall\ m \geq m_0$, $\forall\ r$ nguyên dương ta có

$$\|x_m - x_{m+r}\| \leq \epsilon,$$

tức là

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(m)} - \xi_n^{m+r}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon,$$

$$\Rightarrow |\xi_n^{(m)} - \xi_n^{m+r}| \leq \epsilon, \forall n, \forall m \geq m_0,$$

$$\Rightarrow \forall n, \exists \lim_{m\to\infty} \xi_n^{(m)} = \xi_n^0.$$

Vì vậy,

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} |\xi_n^{(m)} - \xi_n^{(m+r)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \forall N.$$

Cho $r \to \infty$ ta nhận được:

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} |\xi_n^{(m)} - \xi_n^0|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \forall N.$$

Tiếp tục cho $N \to \infty$ ta thu được:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^{(m)} - \xi_n^0|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon,$$

$$\Rightarrow y := (\xi_1^{(m)} - \xi_1^0, \xi_2^{(m)} - \xi_2^0, \ldots) \in l_p,$$

$$\Rightarrow x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots) = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots) - (\xi_1^{(m)} - \xi_1^0, \xi_2^{(m)} - \xi_2^0, \ldots)$$

$$= x_m - y \in l_p,$$

$$\Rightarrow \|y\| = \|x_m - x_0\| \leq \epsilon, \forall m \geq m_0,$$

tức là

$$x_0 = \lim_{m\to\infty} x_m.$$

Vậy l_p là không gian Banach.

Ví dụ 1.6. *Không gian $L_p[a,b], p \geq 1$ gồm tất cả các hàm $x(t)$ xác định và đo được Lebesgue trên $[a,b]$ thỏa mãn $\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty$ là không gian Banach.*

1.1.2 Ánh xạ J-đơn điệu

Cho X là không gian Banach thực và X^* là không gian đối ngẫu của X. Để đơn giản, chuẩn của X và X^* được ký hiệu là $\|.\|$ và $\langle x, x^* \rangle$ là giá trị của $x^* \in X^*$ tại $x \in X$.

Ánh xạ $J^s : X \to X^*$ được gọi là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của X nếu $\forall x \in X$

$$\langle x, J^s(x) \rangle = \|x\|^s, \qquad \|J(x)\| = \|x\|^{s-1}, s \geq 2.$$

Trường hợp $s = 2$ thì ánh xạ J^2 được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X.

Ánh xạ $A : K \to X^*$ được gọi là ánh xạ đơn điệu nếu $\forall x, y \in K$

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0,$$

ở đây K là một tập con lồi đóng của không gian X.

Một ánh xạ $A : K \to X^*$ được gọi là λ ngược đơn điệu mạnh nếu $\forall x, y \in K$, $\exists \lambda > 0$:

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq \lambda \|A(x) - A(y)\|^2$$

Mọi λ ngược đơn điệu mạnh A là đơn điệu và liên tục Lipschitz với hằng số $\dfrac{1}{\lambda}$.

Ánh xạ $A : X \to X$ được gọi là ánh xạ h-liên tục nếu $A(x+tx) \rightharpoonup Ax$ khi $t \to 0^+$, $\forall\ x, y \in X$.

Ánh xạ $A : X \to X$ được gọi là ánh xạ m-J-đơn điệu trên X nếu ánh xạ A thỏa mãn các tính chất:

(i) $\langle A(x) - A(y), j(x - y)\rangle \geq 0, \qquad \forall x, y \in X; j(x - y) \in J(x - y)$,

(ii) $\Re(A + \lambda I) = X$, $\forall \lambda > 0$,

ở đây $\Re(A)$ là miền ảnh của A và I là toán tử đơn vị trên X.

Nếu $\forall x, y \in X$, tồn tại một hằng số α sao cho

$$\langle A(x) - A(y), j(x - y)\rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$$

thì A được gọi là α-J-đơn điệu mạnh. Khi $\alpha = 0, A$ được gọi là J-đơn điệu.

Lưu ý rằng khi $X \equiv H$ là một không gian Hilber, ta có $J = I$ và một ánh xạ A, thỏa mãn $(i), (ii)$ và bất đẳng thức cuối cùng tương ứng được gọi là đơn điệu, đơn điệu cực đại và đơn điệu mạnh. Dễ dàng nhận thấy rằng một ánh xạ tuyến tính và xác định không âm là một ánh xạ đơn điệu.

1.2 Bài toán đặt không chỉnh và phương trình với toán tử đơn điệu

1.2.1 Định nghĩa và ví dụ bài toán đặt không chỉnh

Khái niệm về bài toán chỉnh được J-Hadamard đưa ra khi nghiên cứu về ảnh hưởng của các điều kiện biên lên nghiệm của các phương trình

elliptic cũng như parabolic.
Việc tìm nghiệm x của phương trình:

$$A(x) = f \tag{1.1}$$

với $A : X \to Y$ là một toán tử cho trước, còn X và Y là hai không gian metric, phải dựa vào dữ kiện ban đầu f, có nghĩa là $x = R(f)$. Ta sẽ coi nghiệm cũng như các dữ kiện đó là những phần tử thuộc không gian X và Y với các metric tương ứng là $\rho_X(x_1, x_2)$ và $\rho_Y(f_1, f_2)$; $x_1, x_2 \in X$ và $f_1, f_2 \in Y$.

Giả sử đã có một khái niệm thế nào là nghiệm của một bài toán. Khi đó bài toán tìm nghiệm $x = R(f)$ được gọi là ổn định trên cặp không gian (X, Y), nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$ có thể tìm được một số $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho từ $\rho_Y(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ ta có $\rho_X(x_1, x_2) \leq \varepsilon$. Ở đây,

$$x_1 = R(f_1), \qquad x_2 = R(f_2)$$

$$f_1, f_2 \in Y; \qquad x_1, x_2 \in X$$

Định nghĩa 1.2. *Bài toán tìm nghiệm $x \in X$ theo dữ kiện $f \in Y$ được gọi là bài toán đặt chỉnh trên cặp không gian metric (X, Y) nếu có:*

1. Với mỗi $f \in Y$ tồn tại $x \in X$.

2. Nghiệm x đó được xác định một cách duy nhất.

3.Bài toán này ổn định trên cặp không gian (X, Y), tức là nghiệm x đó phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu.

Một thời gian dài người ta cho rằng mọi bài toán đặt ra đều thỏa mãn ba điều kiện trên. Nhưng thực tế chỉ ra rằng quan niệm đó sai lầm. Trong tính toán các bài toán thực tế bằng máy tính luôn diễn ra quá trình làm tròn số. Chính sự làm tròn đó dẫn đến các kết quả sai lệch đáng kể.

Nếu ít nhất một trong ba điều kiện trên không thỏa mãn thì bài toán tìm nghiệm $x \in X$ theo dữ kiện $f \in Y$ được gọi là bài toán đặt không chỉnh. Đôi khi người ta còn gọi là bài toán đặt không chính quy hoặc bài toán thiết lập không đúng đắn.