ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TÔ HẢI BÌNH

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ THÁC TRIỂN HỘI TỤ TRONG LÝ THUYẾT HÀM HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2008

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Tô Hải Bình

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ THÁC TRIỂN HỘI TỤ TRONG LÝ THUYẾT HÀM HÌNH HỌC

Chuyờn ngành : GIẢI TÍCH
Mó số : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. PHẠM VIỆT ĐỨC

THÁI NGUYÊN - 2008

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU

Việc thác triển các ánh xạ chỉnh hình là một trong những bài toán quan trọng của giải tích phức. Nhiều tác giả đã nghiên cứu bài toán này từ quan điểm của giải tích phức hyperbolic kể từ khi S. Kobayashi đưa ra khái niệm giả khoảng cách Kobayashi và dùng nó để nghiên cứu lý thuyết hàm hình học. Theo hướng nghiên cứu này, J. Noguchi (xem [7] hoặc [10]) đã chứng minh được định lý thác triển hội tụ sau:

"Cho X là không gian phức compact tương đối nhúng hyperbolic trong không gian phức Y. Giả sử M là đa tạp phức và A là siêu mặt phức của M với giao chuẩn tắc. Nếu $\{f_j : M \setminus A \to X\}_{j=1}^{\infty}$ *là dãy các ánh xạ chỉnh hình hội tụ đều trên các tập con compact của* $M \setminus A$ *tới ánh xạ chỉnh hình* $f : M \setminus A \to X$*, thì* $\{\overline{f}_j\}_{j=1}^{\infty}$ *hội tụ đều trên các tập con compact của M tới* $\overline{f}$*, trong đó* $\overline{f}_j : M \to Y$ *và* $\overline{f} : M \to Y$ *là các thác triển chỉnh hình duy nhất của* f_j *và* f *trên* M*".*

Định lý trên của Noguchi đã mở ra một hướng nghiên cứu bài toán thác triển các ánh xạ chỉnh hình. Đó là nghiên cứu các định lý thác triển hội tụ kiểu Noguchi. "Định lý thác triển kiểu Noguchi" là định lý về các ánh xạ tương tự như định lý của Noguchi về thác triển ánh xạ chỉnh hình mà giữ nguyên tính hội tụ đều địa phương. Gần đây, nhiều định lý thác triển hội tụ kiểu Noguchi đối với các siêu mặt giải tích của các đa tạp phức đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu (xem [4], [5], [7]). Mục đích chính của luận văn là trình bày một số định lý thác triển hội tụ kiểu Noguchi đối với các siêu mặt giải tích.

Luận văn được chia làm hai chương.

Chương 1 trình bày các kiến thức chuẩn bị, bao gồm các khái niệm không gian hyperbolic, không gian nhúng hyperbolic và một số định lý thác triển các ánh xạ chỉnh hình như định lý của M. Kwack, K^3-định lý.

Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi chứng minh một số định lý thác triển hội tụ qua các siêu mặt giải tích (không nhất thiết có giao chuẩn tắc).

Luận văn này được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của PGS. TS. Phạm Việt Đức. Nhân dịp này, em xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã chỉ bảo và giúp đỡ em rất nhiều trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Em xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy cô giáo trong Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Viện Toán học Việt Nam đã giảng dạy và giúp đỡ em hoàn thành khoá học.

Đồng thời tôi xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Quảng Ninh, trường THPT Hoành Bồ tỉnh Quảng Ninh, gia đình và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ về mọi mặt trong suốt quá trình tôi học tập và nghiên cứu đề tài này.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2008

Tác giả

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Nội dung của chương này trình bày một số kiến thức chuẩn bị về không gian phức hyperbolic, không gian phức nhúng hyperbolic và một số định lý thác triển các ánh xạ chỉnh hình.

1.1. Không gian phức hyperbolic

1.1.1. Định nghĩa. Không gian phức X được gọi là *không gian hyperbolic* (theo nghĩa Kobayashi) nếu giả khoảng cách Kobayashi d_X là khoảng cách trên X, tức là

$$d_X(p,q)=0 \Leftrightarrow p=q \quad \forall p,q \in X.$$

1.1.2. Một số tính chất của không gian phức hyperbolic

1.1.2.1. Nếu X, Y là các không gian phức, thì $X \times Y$ là không gian hyperbolic nếu và chỉ nếu cả X và Y đều là không gian hyperbolic.

Chứng minh. Vì phép chiếu $\pi : X \times Y \to X$ là ánh xạ chỉnh hình nên π là giảm khoảng cách đối với các giả khoảng cách Kobayashi trên $X \times Y$ và trên X. Tức là ta có:

$$d_{X\times Y}((x,y),(x',y')) \geq d_X(x,x').$$

Lý luận tương tự với phép chiếu $\pi' : X \times Y \to Y$ ta có

$$d_{X\times Y}((x,y),(x',y')) \geq d_Y(y,y').$$

Do đó $d_{X\times Y}((x,y),(x',y')) \geq \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}$.

Như vậy ta suy ra điều phải chứng minh. ,

1.1.2.2. Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y. Nếu Y là hyperbolic thì X cũng là hyperbolic. Hay nói cách khác, không gian con của một không gian hyperbolic là hyperbolic.

Chứng minh. Vì phép nhúng chính tắc $i: X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình, nên theo tính chất giảm khoảng cách của giả khoảng cách Kobayashi ta có ngay điều phải chứng minh. ,

1.1.2.3. Ví dụ

+ Đĩa Δ_r và đa đĩa Δ_r^m là hyperbolic.

+ Một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^m$ là hyperbolic, vì nó là tập con mở của tích các đa đĩa.

+ $\mathbb{C}^m$ không là hyperbolic, vì $d_{\mathbb{C}^m} \equiv 0$.

1.1.3 Định nghĩa. Giả sử *X* là không gian phức với hàm khoảng cách *d*. Một cặp (X, d) được gọi là *tight* nếu họ $\mathrm{Hol}(M, X)$ là đồng liên tục đối với *d*, và với mọi đa tạp phức *M*.

1.1.4. Định lý. *Giả sử X là không gian phức và H là hàm độ dài trên X. Khi đó X là hyperbolic nếu và chỉ nếu với mỗi* $p \in X$, *có các lân cận U của p và hằng số* $C > 0$ *sao cho* $F_X(\xi_x) \geq CH(\xi_x)$ *với mọi* $\xi_x \in T_x X$ *với* $x \in U$.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử *D* là một đa đĩa quanh điểm *p*. Vì *X* là hyperbolic, (X, d_X) là tight (xem [2]) và do đó họ $\mathrm{Hol}(\Delta, X)$ là họ đồng đều. Từ đó có đĩa Δ_δ quanh 0 và một lân cận *U* của *p* sao cho nếu $\Phi(0) = x \in U$ thì $\Phi(\Delta_\delta) \subset D$. Nếu Φ ánh xạ Δ_R vào *X* với $\Phi(0) = x \in U$, thì $\Phi(\Delta_{\delta R}) \subset D$. Vì vậy với $x \in U$, ta có $\delta F_D(\xi_x) \leq F_X(\xi_x)$.

Ta có thể giả sử $\overline{U}$ là tập con compact của *D*. Khi đó với $x \in U, \xi_x \in T_x X$, ta có $F_X(\xi_x) \geq \delta F_D(\xi_x) \geq CH(\xi_x)$ với hằng số dương *C* nào đó.

($\Leftarrow$) Gọi d_{CH} là khoảng cách trên *X* sinh bởi *CH*.

Theo giả thiết, $f^*(CH) \le ds_\Delta^2$ với mọi $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X)$, trong đó ds_Δ^2 là metric Bergman-Poincaré trên Δ.

Từ đó ta có

$$d_{CH}(x,y) \le d_X(x,y) \text{ với } x, y \in X.$$

Điều này kéo theo X là hyperbolic. ,

1.1.5. *k*-metric Kobayashi trong không gian phức

Giả sử X là không gian phức, điểm $x \in X$ và vectơ *k*-mật tiếp $\xi \in J_k(X)_x$. Ta định nghĩa

$$K_X^k(x,\xi) = \inf\{1/r \mid \text{ tồn tại ánh xạ chỉnh hình } f:\Delta \to X$$
$$\text{thỏa mãn } f(0) = x \text{ và } j_k(f)_x = r\xi\}.$$

Hàm $K_X^k : J_k(X) \to [0,\infty)$ được xác định như trên được gọi là *k*-metric Kobayashi trong không gian phức *X*. Đối với *k*-metric Kobayashi ta có các kết quả sau ([16]):

(M1) $K_X^k(0_x) = 0, \quad \forall x \in X.$

(M2) $K_X^k(x,\lambda\xi) = |\lambda| K_X^k(x,\xi), \quad \forall \lambda \in □,\ \forall \xi \in J_k(X)_x.$

(M3) Nếu $F : J_k(X) \to [0,\infty)$ là hàm tùy ý thỏa mãn

$$F(f(0), f_0^*(\eta)) \le K_\Delta^k(0,\eta) \text{ với mọi } f \in \mathrm{Hol}(\Delta, X) \text{ và mọi } \eta \in J_k(\Delta)_0,$$

$$\text{thì } F(x,\xi) \le K_X^k(x,\xi), \quad \forall x \in X,\ \forall \xi \in J_k(X)_x.$$

(M4) Cho trước hai không gian phức *X* và *Y*, ánh xạ chỉnh hình $f \in \mathrm{Hol}(X,Y)$, khi đó

$$K_Y^k(f(x), f_x^*(\xi)) \le K_X^k(x,\xi), \quad \forall x \in X,\ \forall \xi \in J_k(X)_x.$$

(M5) Với mỗi $k \in □^+$, *k*-metric Kobayashi

$$K_X^k : J_k(X) \to [0,\infty)$$

là hàm Borel.

Giả sử $\gamma:[a,b]\to X$, $[a,b]\subset \mathbb{R}$, là đường cong giải tích thực. Với mỗi $t\in[a,b]$ tồn tại một và chỉ một mầm hàm chỉnh hình $\varphi_t \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}, X)$ sao cho $\varphi_t(0)=\gamma(t)$ và $\gamma(t+s)=\varphi_t(s)$ với $\varepsilon>0$ đủ nhỏ, và mỗi $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Từ đó, với mỗi $k\in\mathbb{Z}^+$,

$$j_k\gamma(t) = j_k(\varphi_t)_{\gamma(t)} \in J_k(X)_{\gamma(t)}$$

ta định nghĩa

$$L_X^k(\gamma) = \int_a^b K_X^k(\gamma(t), j_k\gamma(t))dt .$$

Tất cả các định nghĩa trên đều mở rộng được với các đường cong liên tục, giải tích thực từng khúc.

Nếu $\gamma:[a,b]\to X$ là đường cong giải tích thực từng khúc trong không gian phức X thì $\{L_X^k(\gamma)\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy tăng và bị chặn các số thực không âm.

Hơn nữa ta có

$$\delta_X(p,q) = \inf_{\gamma}\{\sup_{\mathrm{k}} \int_0^1 K_X^k(\gamma(t), j_k\gamma(t))dt; \gamma\in\Omega_{p,q}\}$$

với mỗi $p,q\in X$, trong đó $\Omega_{p,q}$ ký hiệu tập tất cả các đường cong liên tục giải tích thực từng khúc nối p với q.

Giả sử X là không gian phức và $\{J_k(X)\}_{k\geq 1}$ là họ các phân thớ các jet trên X. Khi đó có các ánh xạ $J_{k+1}(X)\to J_k(X)$ mà các thớ là các không gian afin tuyến tính.

Ta đặt $\tilde{J}(X) = \lim\mathrm{proj}\, J_k(X)$, và

$$J(X) = \{\xi = (\xi_k \in J_k(X)_x)_{k\geq 1} \in \tilde{J}(X); \exists\varphi\in \mathrm{Hol}(\Delta_r, X)$$
$$\text{sao cho } \varphi(0)=x,\ j_k(\varphi)_x = \xi_k \text{ với mọi } k\geq 1\}.$$

Định nghĩa giả metric vi phân $\tilde{K}_X : J(X)\to[0,\infty)$ xác định bởi

$$\tilde{K}_X(\xi) = \sup_k K_X^k(\xi_k) \text{ với mọi } \xi = (\xi_k)\in J(X).$$

1.2. Không gian phức nhúng hyperbolic

1.2.1. Định nghĩa. Giả sử X là tập con compact của một không gian metric, và Y là một không gian metric đầy. $C(X,Y)$ là tập các ánh xạ liên tục từ X vào Y với chuẩn sup. Họ $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ được gọi là *đồng liên tục tại một điểm* $x_0 \in X$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$, $d(x,x_0) < \delta$, thì

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{với mọi } f \in \mathcal{F} .$$

Họ $\mathcal{F}$ được gọi là *đồng liên tục trên X* nếu $\mathcal{F}$ là đồng liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

1.2.2. Định lý. (Định lý Ascoli đối với họ đồng liên tục)

Giả sử X là tập con compact của một không gian metric, và Y là một không gian metric đầy. Giả sử $\mathcal{F}$ là tập con của tập các ánh xạ liên tục $C(X,Y)$. Khi đó $\mathcal{F}$ là compact tương đối trong $C(X,Y)$ nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn

i) $\mathcal{F}$ là họ đồng liên tục trên X.

ii) Với mỗi $x \in X$, tập hợp $\mathcal{F}_x = \{ f(x) | f \in \mathcal{F} \}$ là compact tương đối trong Y.

1.2.3. Định nghĩa. Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y. X được gọi là *nhúng hyperbolic* trong Y nếu với mọi $x, y \in \overline{X}, x \neq y$ luôn tồn tại các lân cận mở U của x và V của y trong Y sao cho

$$d_X(X \cap U, X \cap V) > 0 .$$

1.2.4. Định lý. *Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*

HI1. *X là nhúng hyperbolic trong Y.*

HI2. *X là hyperbolic và nếu $\{x_n\},\{y_n\}$ là các dãy trong X thỏa mãn $x_n \to x \in \partial X$, $y_n \to y \in \partial X$, $d_X(x_n, y_n) \to 0$ thì $x = y$.*