ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐỨC LỢI

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN ĐỨC LỢI

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Lời cảm ơn ii

Bảng ký hiệu iii

Mở đầu 1

1 Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert 3

1.1 Không gian Hilbert thực 3

1.2 Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert . . 11

2 Phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert 15

2.1 Mô tả phương pháp 18

2.2 Sự hội tụ mạnh 19

Kết luận 30

Tài liệu tham khảo 32

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn về sự tận tâm và nhiệt tình của Cô trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Nguyễn Đức Lợi

BẢNG KÝ HIỆU

$\mathbb{R}$	trường số thực
$\emptyset$	tập rỗng
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$\|x\|$	giá trị tuyệt đối của x
$\|\|x\|\|$	chuẩn của véctơ x
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai phần tử x và y
$B(x, \rho)$	hình cầu mở tâm x, bán kính $\rho > 0$
$\overline{B}(x, \rho)$	hình cầu đóng tâm x, bán kính $\rho > 0$
$\operatorname{int} \mathrm{C}$	phần trong của tập hợp C
∂C	biên của tập hợp C
$\mathcal{D}(F)$	miền xác định của ánh xạ F

Mở đầu

Bất đẳng thức biến phân được Stampacchia [7] đưa ra nghiên cứu vào những năm đầu của thập kỷ 60 trong khi nghiên cứu bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Kể từ đó bất đẳng thức biến phân và phương pháp giải bài toán này luôn là một đề tài thời sự, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert H được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm phần tử } u^* \in C \text{ sao cho : } \quad \langle F(u^*), v - u^* \rangle \geq 0, \quad \forall v \in C, \quad (1)$$

ở đây C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $F : C \to H$ là một ánh xạ phi tuyến. Bất đẳng thức biến phân (1) tương đương với bài toán điểm bất động:

$$u^* = P_C(u^* - \mu F(u^*)), \quad (2)$$

trong đó P_C là phép chiếu mêtric từ H lên C và $\mu > 0$ là hằng số tùy ý. Nếu ánh xạ F đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz trên C và hằng số $\mu > 0$ đủ nhỏ, thì ánh xạ được xác định bởi vế phải của (2) là ánh xạ co. Do đó, nguyên lý ánh xạ co Banach bảo đảm rằng dãy lặp Picard

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \mu F(x_n))$$

hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán (1). Phương pháp này được gọi là phương pháp chiếu. Phương pháp chiếu không dễ dàng thực thi vì nó phụ thuộc vào độ phức tạp của tập lồi C bất kỳ. Để khắc phục nhược điểm này, Yamada [9] (xem thêm [5]) đã đề xuất phương pháp lai đường dốc nhất vào năm 2001 để giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert H. Từ đó đến nay đã có nhiều công trình mở rộng hướng nghiên cứu của Yamada để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn theo hướng làm giảm nhẹ điều kiện đặt lên thuật toán này hoặc mở rộng cho bài toán tổng quát hơn đối với họ hữu hạn, họ vô hạn đếm được hay họ vô hạn không đếm được các ánh xạ không giãn.

Mục đích của luận văn là trình bày một cải biên của phương pháp lai đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert trên cơ sở bài báo [6] công bố năm 2012.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert thực và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert cùng phương pháp lai đường dốc nhất giải bài toán này.

Trong chương 2 trình bày hai phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert

Chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức và kết quả cơ bản về không gian Hilbert thực, ánh xạ không giãn và bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert. Các kiến thức của chương này được viết dựa trên các tài liệu [1], [2] và [7].

1.1 Không gian Hilbert thực

Định nghĩa 1.1. Không gian tuyến tính H xác định trên trường số thực $\mathbb{R}$ được gọi là *không gian tiền Hilbert* nếu trong đó xác định một hàm hai biến $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$ và $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in H$;

(iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in H$;

(iv) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Hàm $\langle \cdot, \cdot \rangle$ thỏa mãn bốn tính chất trên được gọi là *tích vô hướng* trên H và $\langle x, y\rangle$ là *tích vô hướng của hai phần tử x và y.*

Nhận xét 1.1. Mọi không gian tiền Hilbert H là không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn của $x \in H$ xác định bởi $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Định nghĩa 1.2. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1. $\mathbb{R}^n$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k,$$

trong đó $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ và $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ví dụ 1.2. $l^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ là các dãy số thực trong l^2.

Bổ đề 1.1. *Cho H là không gian Hilbert thực. Khi đó các biểu thức sau đúng:*

(i) $||tx + (1-t)y||^2 = t||x||^2 + (1-t)||y||^2 - t(1-t)||x-y||^2$ *với mọi* $x, y \in H$ *và* $t \in [0, 1]$.

(ii) $||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2\langle y, x+y\rangle$ *với mọi* $x, y \in H$.

Định nghĩa 1.3. Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong không gian Hilbert H được gọi là *hội tụ yếu* đến phần tử $x \in H$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$ với mọi $y \in H$. Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là *hội tụ mạnh* nếu $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$.

Ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$ chỉ sự hội tụ yếu, $x_n \to x$ chỉ sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ đến phần tử $x \in H$.

Định nghĩa 1.4. Tập hợp $C \subset H$ được gọi là *tập lồi* nếu

$$\forall x_1, x_2 \in C,\ \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C.$$

Ví dụ 1.3. Trong không gian hữu hạn chiều, mặt phẳng, đoạn thẳng, đường thẳng, tam giác, hình cầu là các tập lồi.

Định nghĩa 1.5. Tập $C \subseteq H$ được gọi là *tập đóng* nếu mọi dãy hội tụ $\{x_n\} \subset C$ đều có giới hạn thuộc C, tức là

$$\Big\{\forall \{x_n\} \subset C : x_n \to x\Big\} \Rightarrow x \in C.$$

Ví dụ 1.4. Hình cầu đóng $\overline{B}(\bar{x}, r) = \{x \in H : ||x - \bar{x}|| \leq r\}$ tâm $\bar{x}$, bán kính $r > 0$ là tập đóng.

Định nghĩa 1.6. Cho C là một tập con lồi đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H, $F : C \to H$ là một ánh xạ. Ánh xạ F được gọi là:

(i) *L-liên tục Lipschitz* trên C, nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho

$$||F(x) - F(y)|| \leq L||x - y||,\ \forall x, y \in C.$$

Nếu $0 < L < 1$ thì F được gọi là *ánh xạ co*, nếu $L = 1$ thì F được gọi là *ánh xạ không giãn*;

(ii) *bị chặn Lipschitz* trên C nếu với mỗi tập con bị chặn B của C, F là ánh xạ L-liên tục Lipschitz trên B;

(iii) *đơn điệu* trên C, nếu

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq 0\,, \forall x, y \in C;$$

(iv) η-*đơn điệu mạnh* trên C, nếu tồn tại một hằng số η dương sao