ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ KIM THỦY

PH- ƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LẶP GIẢI HỆ PH- ƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ KIM THỦY

PH- ƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LẶP GIẢI HỆ PH- ƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Ng□ời h□ớng dẫn khoa học:
PGS.TS ĐỖ VĂN L- U

THÁI NGUYÊN - 2014

Mục lục

MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán của thực tế dẫn đến việc giải hệ phương trình toán tử

$$A_i(x) = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

ở đây $A_i : E \to F$ là các toán tử từ không gian Banach E vào không gian Banach F, $f_i \in F$ cho trước, $N \geq 1$ là một số tự nhiên. Bài toán ngược là bài toán tìm một đại lượng vật lý chưa biết x thuộc không gian Banach E từ một bộ hữu hạn dữ kiện $(f_1, f_2, \ldots, f_N) \in F^N$ cho trước trong không gian Banach F (xem [7]). Trong thực tế, ta không biết chính xác các dữ kiện f_i, thay vào đó ta chỉ biết các xấp xỉ $f_i^\delta \in F$ của các dữ kiện f_i thỏa mãn

$$\|f_i - f_i^\delta\| \leq \delta, \quad \delta \to 0. \tag{2}$$

Tập hữu hạn các dữ kiện f_i^δ nhận được do đo đạc trực tiếp trên các tham số. Bài toán này được mô tả dưới dạng hệ phương trình toán tử (1) với $A_i : \mathcal{D}(A_i) \subset E \to F$, ở đây $\mathcal{D}(A_i)$ định nghĩa là miền xác định của toán tử A_i, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Hệ phương trình toán tử (1), nói chung, là một bài toán đặt không chỉnh, theo nghĩa tập nghiệm của bài toán không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Một số phương pháp cơ bản tìm nghiệm của hệ phương trình toán tử đặt không chỉnh phải kể đến phương pháp kiểu hiệu chỉnh lặp (xem [4] và các tài liệu trích dẫn) hoặc phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov (xem [9] và các tài liệu trích dẫn) sau khi viết lại hệ phương trình toán tử (1) dưới dạng phương trình $\mathcal{A}(x) = f$, ở đây

$$\mathcal{A} := (A_1, A_2, ..., A_N) : \cap_{i=1}^N \mathcal{D}(A_i) =: \mathcal{D} \to F^N \tag{3}$$

và $f := (f_1, f_2, \ldots, f_N)$. Các phương pháp này thường không hiệu quả khi số phương trình của hệ N lớn. Để khắc phục nhược điểm này, người ta sử dụng phương pháp lặp xoay vòng kiểu Kaczmarz cho mỗi phương trình của hệ (xem [8] và các tài liệu trích dẫn). Phương pháp kiểu Kaczmarz vốn là thuật toán tuần tự, nên khi N lớn thường gây tốn kém trên một bộ xử lý đơn.

Năm 2006, để giải hệ phương trình toán tử đặt không chỉnh (1), Nguyễn Bường [5] đưa ra một phương pháp hiệu chỉnh kiểu Browder-Tikhonov khi các toán tử A_i là *hemi*-liên tục, đơn điệu và có tính chất thế năng. Phương pháp của Nguyễn Bường và một số biến thể của phương pháp có thể dùng cho việc tính toán song song (xem [3]).

Mục đích đề tài luận văn là tìm hiểu và trình bày lại một số kết quả trong [6], [10] và [11] về phương pháp hiệu chỉnh lặp và phương pháp lặp hiện giải hệ phương trình toán tử đơn điệu (1).

Nội dung luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu một số khái niệm và kết quả của không gian Hilbert, không gian Banach, toán tử đơn điệu, ánh xạ đối ngẫu và toán tử chiếu. Phần cuối của chương giới thiệu hệ phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov hiệu chỉnh bài toán này trong không gian Banach.

Chương 2 trình bày phương pháp hiệu chỉnh lặp và phương pháp lặp hiện trong không gian Hilbert hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh. Phần cuối của chương trình bày một ví dụ số minh họa sự hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh lặp giải hệ phương trình toán tử trong không gian Hilbert.

Qua đây, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới người Thầy, người hướng dẫn luận văn cao học của mình, PGS. TS Đỗ Văn Lưu - Viện Toán học và TS. Nguyễn Thị Thu Thủy - giảng viên trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và giải quyết những thắc mắc cho tôi trong suốt quá trình tôi làm luận văn. Tôi cũng xin bày tỏ lời cảm ơn chân thành tới các

thầy cô trong hội đồng chấm luận văn thạc sĩ, các thầy cô giảng dạy lớp cao học toán K6C, gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã tạo những điều kiện thuận lợi nhất để tôi có thể hoàn thiện khóa học cũng như luận văn của mình.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2014

Học viên

Nguyễn Thị Kim Thủy

BẢNG KÝ HIỆU

$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
E	không gian Banach thực
E^*	không gian liên hợp của E
$\langle \xi, x \rangle$	giá trị của phiếm hàm ξ tại x
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền giá trị của toán tử A
H	không gian Hilbert thực
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
I	ánh xạ đơn vị
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
$x_n \to x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x
$x_n \rightharpoonup x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x

Chương 1

Hệ phương trình toán tử đơn điệu

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Banach, không gian Hilbert, toán tử đơn điệu, hệ phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử đơn điệu. Các kiến thức của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [10] và một số tài liệu trích dẫn trong đó.

1.1 Không gian Banach. Không gian Hilbert

1.1.1 Không gian Banach

Định nghĩa 1.1. Không gian định chuẩn là không gian tuyến tính E trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in E$ ta có một số $\|x\|$ gọi là chuẩn của x, thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $\|x\| > 0$ với mọi $x \neq 0$, $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;

(2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ với mọi x, $y \in E$; (bất đẳng thức tam giác)

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$ với mọi $x \in E$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Không gian định chuẩn đầy đủ là không gian Banach.

Ví dụ 1.1. Không gian $L^p[a, b]$ với $1 \leq p < \infty$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|\varphi\| = \Big(\int_a^b |\varphi(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \varphi \in L^p[a,b].$$

Định nghĩa 1.2. Dãy các phần tử x_n trong không gian Banach E được gọi là hội tụ đến phần tử $x_0 \in E$ khi $n \to \infty$, nếu $\|x_n - x_0\| \to 0$ khi $n \to \infty$, ký hiệu là $x_n \to x_0$. Sự hội tụ theo chuẩn được gọi là hội tụ mạnh.

Định nghĩa 1.3. Dãy $\{x_n\} \subset E$ được gọi là hội tụ yếu đến $x_0 \in E$, ký hiệu là $x_n \rightharpoonup x_0$, nếu với mọi $f \in E^*$-không gian liên hợp của E, ta có $f(x_n) \to f(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Từ định nghĩa trên ta có tính chất sau:

(i) Từ sự hội tụ mạnh của một dãy $\{x_n\}$ suy ra sự hội tụ yếu của dãy đó.

(ii) Giới hạn yếu của một dãy nếu có là duy nhất.

(iii) Nếu $x_n \rightharpoonup x$ thì $\sup\limits_{1 \le n < \infty} \|x_n\| < \infty$ và $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Chú ý rằng, một số trường hợp từ hội tụ yếu có thể suy ra hội tụ mạnh là: E là không gian hữu hạn chiều; $\{x_n\} \subset M$ với M là một tập compact trong E.

Định lý 1.1. *Nếu E là không gian Banach thì các khẳng định sau là tương đương:*

(i) E phản xạ;

(ii) Mọi dãy giới nội là compact yếu, nghĩa là với mọi dãy $\{x_n\} \subset E : \|x_n\| \le K$ thì tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ mà $x_{n_k} \rightharpoonup x \in E$.

Định nghĩa 1.4. Cho E là không gian Banach thực, E^* là không gian liên hợp của E, $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một phiếm hàm trên E. Phiếm hàm φ được gọi là

(i) lồi nếu

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y), \quad \forall x, y \in E, \ \lambda \in (0,1);$$