ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NÔNG THẾ HƯNG

NHÚNG HYPERBOLIC VÀ KHÔNG GIAN CÁC THÁC TRIỂN LIÊN TỤC CỦA CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NÔNG THẾ HƯNG

NHÚNG HYPERBOLIC VÀ KHÔNG GIAN CÁC THÁC TRIỂN LIÊN TỤC CỦA CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai

THÁI NGUYÊN – 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu được trích dẫn trong luận văn là trung thực.

Tác giả

Nông Thế Hưng

Xác nhận của trưởng khoa chuyên môn

Xác nhận của người hướng dẫn khoa học

TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết các không gian phức hyperbolic được S. Kobayashi đưa ra đầu thập kỷ 70 của thế kỷ trước và đã trở thành một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của giải tích phức. Lý thuyết này đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới. Một số kết quả sâu sắc và đẹp đẽ của lý thuyết này đã được chứng minh bởi S. Kobayashi, M. Kwack, J. Noguchi, J. Joseph …Những công trình nghiên cứu đó đã thúc đẩy hướng nghiên cứu này phát triển mạnh mẽ.

Năm 1994, James E. Joseph và Myung H. Kwack đã đưa ra đặc trưng cho tính nhúng hyperbolic của không gian con phức X vào không gian phức Y đó là: tính nhúng hyperbolic của không gian con phức X vào không gian phức Y được đặc trưng bởi tính compact tương đối trong cấu trúc compact - mở của các không gian thác triển liên tục các ánh xạ chỉnh hình từ đĩa thủng D* đến X và từ M - A đến X trong đó M là một đa tạp phức và A là một divisor trên M với giao chuẩn tắc. James E. Joseph và Myung H. Kwack đã áp dụng các đặc trưng đó khái quát và mở rộng các định lý của Kobayashi, Kiernan, Kwack, Noguchi và Vitali mà không cần đến giả thiết về tính compact tương đối của X trong Y. Mục đích của luận văn này là nghiên cứu và trình bày chi tiết các kết quả nói trên.

Luận văn gồm hai chương.

Chương 1 trình bày các kiến thức chuẩn bị bao gồm một số kiến thức cơ bản về giải tích phức liên quan đến nội dung chính của luận văn như: đa tạp phức, không gian phức, không gian phức hyperbolic, Divisor với giao chuẩn tắc, không gian phức nhúng hyperbolic, giả khoảng cách tương đối Kobayashi.

Chương 2 trình bày nội dung chính của luận văn. Phần đầu chương, chúng tôi trình bày về các đặc trưng của điểm hyperbolic; Phần tiếp theo, chúng tôi chứng minh chi tiết tính nhúng hyperbolic của không gian phức X vào không gian phức Y được đặc trưng bởi tính compact tương đối của không gian các thác triển liên tục của các ánh xạ chỉnh hình. Cuối chương là ứng dụng của các định lý đã nêu vào việc mở rộng, khái quát các định lý như Định lý Picard, Định lý Noguchi, Định lý Vitali …

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai. Nhân đây, em xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Cô, người đã chỉ bảo và giúp đỡ em rất nhiều trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Em xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy, cô giáo trong trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Viện Toán học Việt Nam đã giảng dạy và giúp đỡ em hoàn thành khóa học.

Đồng thời tôi xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Thái Nguyên, Trường THPT Võ Nhai, gia đình và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ về mọi mặt trong suốt quá trình tôi học tập và nghiên cứu đề tài này.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2014

Tác giả

CHƯƠNG 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Đa tạp phức

1.1.1 Định nghĩa

Giả sử *X* là một không gian tô pô Hausdorff.

Cặp (U,φ) được gọi là một bản đồ địa phương của *X*, trong đó *U* là tập mở trong *X* và $\varphi: U \to \mathbb{C}^n$ là ánh xạ, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $\varphi(U)$ là tập mở trong $\mathbb{C}^n$.

ii) $\varphi: U \to \varphi(U)$ là một đồng phôi.

Họ $\mathrm{A} = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ các bản đồ địa phương của *X* được gọi là một tập bản đồ giải tích (atlas) của X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

i) $\{U_i\}_{i\in I}$ là một phủ mở của *X*.

ii) Với mọi U_i, U_j mà $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, ánh xạ

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ là ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ các atlas trên *X*. Hai atlas A_1, A_2 được gọi là tương đương nếu hợp $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$ là một atlas. Đây là một quan hệ tương đương trên tập các atlas. Mỗi lớp tương đương xác định một cấu trúc khả vi phức trên *X*, và *X* cùng với cấu trúc khả vi phức trên đó được gọi là một đa tạp phức *n* chiều.

1.1.2 Ví dụ

1. Giả sử *D* là miền trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, *D* là một đa tạp phức *n* chiều với bản đồ địa phương $\{(D, Id_D)\}$.

2. Đa tạp xạ ảnh $\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$

Xét $U_i = \{[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathrm{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_i \neq 0\}$ với $i = 0,1,\ldots,n$. Rõ ràng $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ là một phủ mở của $\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$.

Xét các đồng phôi $\varphi_i: U_i \to \mathbb{C}^n$

$$[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i},\ldots,\frac{z_{i-1}}{z_i},\frac{z_{i+1}}{z_i},\ldots,\frac{z_n}{z_i}\right).$$

Ta có

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i\ U_i \cap U_j\ \to \varphi_j\ U_i \cap U_j$$

$$(z_0, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n) \mapsto \left(\frac{z_k}{z_j}\right)_{k \neq j} ; k = 0, ..., n; z_i = 1$$

Rõ ràng $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ là ánh xạ chỉnh hình. Vậy $P^n(\mathbb{C})$ là một đa tạp phức *n* chiều và gọi là đa tạp xạ ảnh *n* chiều.

1.1.3 Ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp phức

Giả sử *M, N* là các đa tạp phức. Ánh xạ liên tục $f : M \to N$ được gọi là chỉnh hình trên M nếu với mọi bản đồ địa phương (U, φ) của *M* và mọi bản đồ địa phương (V, ψ) của *N* sao cho $f\ U\ \subset V$ thì ánh xạ

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \text{ là ánh xạ chỉnh hình.}$$

Hay tương đương, với mọi $x \in M, y \in N$ tồn tại hai bản đồ địa phương (U, φ) và (V, ψ) tại *x* và *y* tương ứng sao cho

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \text{ là ánh xạ chỉnh hình.}$$

Giả sử $f : M \to N$ là song ánh giữa các đa tạp phức. Nếu *f* và f^{-1} là các ánh xạ chỉnh hình thì *f* được gọi là ánh xạ song chỉnh hình giữa *M* và *N*.

1.2 Không gian phức

1.2.1 Định nghĩa

Giả sử *Z* là đa tạp phức. Một không gian phức đóng *X* là một tập con đóng của *Z* mà về mặt địa phương được xác định bởi hữu hạn các phương trình giải tích. Tức là, với $x_0 \in X$ tồn tại lân cận mở *V* của x_0 trong *Z* và hữu hạn các hàm chỉnh hình $\varphi_1, ..., \varphi_m$ trên *V* sao cho $X \cap V = \{x \in V \mid \varphi_i(x) = 0, i = 1, ..., m\}$.

Giả sử X là một không gian con phức trong đa tạp phức *Z*. Hàm $f : X \to \mathbb{C}$ được gọi là chỉnh hình nếu với mỗi điểm $x \in X$ tồn tại một lân cận $U(x) \subset Z$ và một hàm chỉnh hình $\tilde{f}$ trên *U* sao cho $\tilde{f}\,|_{U \cap X} = f\,|_{U \cap X}$.

Giả sử $f : X \to Y$ là ánh xạ giữa hai không gian phức *X* và *Y*. f được gọi là chỉnh hình nếu với mỗi hàm chỉnh hình *g* trên một tập con mở *V* của *Y*, hàm hợp $g \circ f$ là hàm chỉnh hình trên $f^{-1}(V)$.

1.2.2 Định lý

Giả sử $f_n : X \to Y$ *là dãy các ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức X, Y. Nếu* f_n *hội tụ đều tới f trong H(X, Y) thì f là ánh xạ chỉnh hình.* (trong đó *H*(*X*, *Y*) là tập các ánh xạ chỉnh hình từ *X* và *Y* được trang bị tô pô compact mở).

1.2.3 Divisor với giao chuẩn tắc [D]

Giả sử *Y* là một không gian phức. Một divisor Catier *A* trên *Y* là một không gian con đóng mà về mặt địa phương tại mỗi điểm có thể được xác định bởi một phương trình giải tích. Tức là, với mỗi điểm $x \in A$ tồn tại một lân cận *V* của *x* trong *Y* sao cho $A \cap V$ được xác định bởi phương trình $\varphi = 0$, với φ là một hàm chỉnh hình nào đó trên *V*.

Giả sử *M* là một đa tạp phức *m* chiều và *A* là một divisor. Ta nói A có giao chuẩn tắc nếu tại mỗi điểm, tồn tại một hệ tọa độ phức $z_1,...,z_m$ trong *M* sao cho về mặt địa phương

$$M \setminus A = D^{*r} \times D^s \text{ với } r + s = m.$$

Từ đó về mặt địa phương *A* được xác định bởi phương trình $z_1...z_r = 0$.

1.3 Định lý Ascoli [D]

1.3.1 Định nghĩa

Giả sử *X* là tập con compact của một không gian metric, và *Y* là một không gian metric đầy. *C*(*X*,*Y*) là tập các ánh xạ liên tục từ X vào Y với chuẩn sup. Họ $\Phi \subset C(X,Y)$ được gọi là đồng liên tục tại một điểm $x_0 \in X$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X, d(x,x_0) < \delta$ thì

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \qquad \text{với mọi } f \in \Phi.$$

Họ Φ được gọi là đồng liên tục trên *X* nếu Φ là đồng liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

1.3.2 Định lý (Định lý Ascoli đối với họ đồng liên tục)

Giả sử X là tập con compact của một không gian metric, và Y là một không gian metric đầy. Giả sử Φ là tập con của tập các ánh xạ liên tục C(X,Y). Khi đó Φ là compact tương đối trong C(X,Y) nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn :

i) Φ là họ đồng liên tục trên ;.

ii) Với mỗi $x \in X$, tập hợp $\Phi_x = \{f(x) \mid f \in \Phi\}$ *là compact tương đối trong Y.*

1.3.3 Định nghĩa

Giả sử Φ là một họ nào đó các ánh xạ từ không gian tô pô *X* vào không gian tô pô *Y*. Họ Φ được gọi là liên tục đồng đều từ $x \in X$ tới $y \in Y$ nếu với mỗi lân cận U của điểm y đều tìm được một lân cận V của điểm x và lân cận W của điểm y sao cho

Nếu $f \quad x \in W$ thì $f(V) \subset U$, với mọi $f \in \Phi$.

Nếu Φ là liên tục đồng đều với mọi $x \in X$ và mọi $y \in Y$ thì Φ được gọi là liên tục đồng đều từ *X* đến *Y*.

1.3.4 Định lý Ascoli (đối với họ liên tục đồng đều)

Giả sử Φ là tập con của tập các ánh xạ liên tục C(X, Y) từ không gian chính quy compact địa phương X vào không gian Haudorff Y và C(X, Y) có tô pô compact mở. Khi đó Φ là compact tương đối trong C(X, Y) khi và chỉ khi hai điều kiện sau được thỏa mãn :

i) Φ là họ liên tục đồng đều ;

ii) Với mỗi $x \in X$ *, tập hợp* $\mathrm{F}_x = \quad f(x) \mid f \in \mathrm{F}$ *là compact tương đối trong Y.*

1.4 Giả khoảng cách Kobayashi [D]

1.4.1 Định nghĩa

Giả sử *X* là một không gian phức, *x* và *y* là hai điểm tùy ý của *X*. H(D,X) là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ D vào *X* , được trang bị tô pô compact mở. Xét dãy các điểm $p_0 = x, p_1, ..., p_k = y$ của X , dãy các điểm $a_1, ..., a_k$ của D và dãy các ánh xạ $f_1, ..., f_k$ trong H(D,*X*) thỏa mãn

$$f_i(0) = p_{i-1},\ f_i(a_i) = p_i, \qquad \forall i = 1, ..., k.$$