ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ HỮU GIÁP

PHỨC COUSIN CỦA CÁC MÔĐUN TRÊN VÀNH GIAO HOÁN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ HỮU GIÁP

PHỨC COUSIN CỦA CÁC MÔĐUN TRÊN VÀNH GIAO HOÁN

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 60. 46. 01. 04

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN VĂN HOÀNG

THÁI NGUYÊN - 2014

Xác nhận của khoa chuyên môn

Xác nhận của cán bộ hướng dẫn

Mục lục

Mở đầu

Phức Cousin của các môđun trên vành giao hoán là một công cụ để nghiên cứu về cấu trúc của một số lớp môđun quan trọng của Đại số giao hoán và Hình học đại số. Phức Cousin của các môđun trên vành giao hoán được nghiên cứu bởi tác giả R. Y. Sharp năm 1969 (xem [17]). Từ đó đến nay phức Cousin đã được ứng dụng khá nhiều bởi các nhà toán học trên thế giới, chẳng hạn R. Y. Sharp ([17], [18]), P. Schenzel ([19]), T. Kawasaki ([10]), M. Dibaei ([5]),...

Cho A là vành giao hoán Noether và M là $A-$môđun. Trong [17], Sharp đã xây dựng phức Cousin của môđun M:

$$C_A(M) : 0 \to M \xrightarrow{d^{-1}} M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \to ... \to M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \to ...$$

thỏa mãn tính chất $\mathrm{Supp}(\mathrm{Coker}(d^{n-2})) \subseteq U^n(M)$ với mọi $n \geq 0$, trong đó

$$U^n(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) \mid \dim_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geq n\}$$

(xem Định nghĩa 2.2.1). Tiếp theo Sharp đã sử dụng phức Cousin để đặc trưng được lớp vành Cohen-Macaulay và vành Gorenstein, đó là các vành quan trọng của Đại số..

Mục đích chính của luận văn là trình bày lại chi tiết các chứng minh của các kết quả trong bài báo [17] của R. Y. Sharp "*The Counsin Complex for a Module over a Commutative Noetherian Ring*, Math. Z. 112 (1969), 340-356" về phức Cousin và một số áp dụng của nó như đã nêu tóm tắt ở trên. Luận văn được chia làm 3 chương.

- Chương 1. Trình bày các kiến thức cơ sở để chứng minh các kết quả chính của luận văn, bao gồm: tập giá và tập iđêan nguyên tố liên kết của môđun, khái niệm chiều, độ cao, môđun Ext, môđun Cohen-Macaulay, vành Gorenstein.

- Chương 2. Trình bày một số tính chất về một số tập các iđêan nguyên tố đặc biệt (ở Mục 2.1). Trên cơ sở đó trình bày định nghĩa về xây dựng phức Cousin $C_A(M)$ cho một $A-$môđun M (ở Mục 2.2). Phần tiếp của Chương 2 dành để trình bày một số tính chất quan trọng khác của phức Cousin (ở Mục 2.3).

- Chương 3. Phần đầu trình bày mối liên hệ giữa phức Cousin và địa phương hóa, thể hiện ở Định lý 3.1.8. Phần tiếp của chương là nghiên cứu một đặc trưng của vành Cohen-Macaulay thông qua phức Cousin, đó là Định lý 3.2.6: *Vành giao hoán A là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi phức Cousin* $C_A(A)$ *là dãy khớp.* Cuối cùng, sau khi nhắc lại một số kiến thức quan trọng cần thiết về môđun nội xạ, phần còn lại của chương này dành để mô tả đặc trưng của vành Gorenstein thông qua phức Cousin đó là Định lý 3.3.5: *Vành giao hoán A là Gorenstein khi và chỉ khi phức Cousin* $C_A(A)$ *là một phép giải nội xạ của* $A-$*môđun A.*

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Tiến sĩ NGUYỄN VĂN HOÀNG - Giảng viên Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi cách đọc tài liệu, nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập. Tôi xin cảm ơn ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học, Sở LĐTBXH tỉnh Thái Nguyên, Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo và khoa Văn hóa cơ sở Trường Trung cấp nghề Nam Thái Nguyên (Phổ Yên - Thái Nguyên) đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập. Cuối cùng tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2014

TÁC GIẢ

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhằm trình bày một số kiến thức cơ sở cần thiết cho chứng minh các kết quả của các chương sau. Ta sử dụng các thuật ngữ theo Atiyah-Macdonald [1], và Matsumura [6]. Ta luôn giả thiết A là một vành giao hoán Noether có đơn vị và M là một $A-$môđun.

1.1 Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Kí hiệu 1.1.1. i) Cho N là môđun con của $A-$môđun con của M và Y là một tập con của M. Khi đó ta dễ thấy tập hợp

$$\{a \in A \mid ay \in N, \forall y \in Y\}$$

là một iđêan của A, ta kí hiệu nó là $(N : Y)_A$. Đặc biệt, ta còn kí hiệu $(0 : M)_A$ bởi $\mathrm{ann}_A(M)$ (hay $\mathrm{Ann}_A(M)$) và gọi là *linh hóa tử của* M; hơn nữa, với mỗi $x \in M$, ta kí hiệu $(0 : x)_A = \mathrm{ann}_A(x) = \mathrm{Ann}_A(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$, và gọi là *linh hóa tử của* x.

ii) Nếu S là một tập đóng nhân của A, và $f : M \longrightarrow N$ là một đồng cấu của các $A-$môđun, thì ta kí hiệu

$$S^{-1}f : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$

là một đồng cấu của các $S^{-1}A$-môđun xác định bởi quy tắc

$$\big(S^{-1}f\big)\big(\frac{m}{s}\big) = \frac{f(m)}{s} \text{ với mọi } \frac{m}{s} \in S^{-1}M.$$

Định nghĩa 1.1.2. *(Giá của môđun)* Cho M là một $A-$môđun, giá của môđun M được kí hiệu là $\mathrm{Supp}(M)$ hoặc $\mathrm{Supp}_A(M)$, nó là một tập con của $\mathrm{Spec}(A)$ được xác định bởi:

$$\mathrm{Supp}_A(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Chú ý rằng $M = 0$ khi và chỉ khi $\mathrm{Supp}(M) = \emptyset$.

Hàm tử địa phương hóa $S^{-1}(-)$ có một số các tính chất sau đây.

Mệnh đề 1.1.3. *Cho S là một tập đóng nhân của A và M là một $A-$môđun. Giả sử N và P là các môđun con của M, với P là hữu hạn sinh. Khi đó các phát biểu sau là đúng.*

(i) $S^{-1}((N:P)_A) = (S^{-1}N : S^{-1}P)_{S^{-1}A}$.

(ii) Với $x \in M$, ta có $S^{-1}((N:x)_A) = (S^{-1}N : \frac{x}{1})_{S^{-1}A}$. Đặc biệt ta có $S^{-1}((0:x)_A) = (0 : \frac{x}{1})_{S^{-1}A}$.

Chứng minh. (i) "$\subseteq$": Lấy $a/s \in S^{-1}((N:P)_A)$ với $a \in (N:P)_A$. Khi đó $aP \subseteq N$. Từ đó $\big(\frac{a}{s}\big)S^{-1}P \subseteq S^{-1}N$. Do vậy

$$S^{-1}((N:P)_A) \subseteq (S^{-1}N : S^{-1}P)_{S^{-1}A}.$$

"$\supseteq$": Với mọi $a/s \in (S^{-1}N : S^{-1}P)_{S^{-1}A}$, ta có $\big(a/s\big)S^{-1}P \subseteq S^{-1}N$. Suy ra $a/1(S^{-1}P) = (s/1)(a/s)(S^{-1}P) \subseteq S^{-1}N$. Do P hữu hạn sinh nên có $m_1, \ldots, m_n$ sao cho $P = \langle m_1, \ldots, m_n\rangle$. Ta có $(a/1)(m_i/1) \in S^{-1}N$ với mọi i. Suy ra tồn tại $s_i \in S$ để $s_i(am_i) \in N$ với mọi i. Đặt $s' = s_1 \ldots s_n$. Khi đó $s'am_i \in N$ với mọi i, suy ra $s'aP \subseteq N$. Vì thế $a/s = s'a/s's$ và $(s'a)P \subseteq N$ (hay $s'a \in (N:P)$). Như vậy $a/s = s'a/s's \in S^{-1}(P:N)$. Do đó

$$S^{-1}((N:P)_A) \supseteq (S^{-1}N : S^{-1}P)_{S^{-1}A}.$$

(ii) Đặt $P = \langle x \rangle$. Khi đó P hữu hạn sinh, do đó theo i), ta có

$$S^{-1}((N : P)_A) = (S^{-1}N : S^{-1}P)_{S^{-1}A}$$

hay

$$S^{-1}((N : Ax)_A) = (S^{-1}N : S^{-1}(Ax))_{S^{-1}A}.$$

Ta lại có $(N : Ax)_A = (N : x)_A$ và

$$(S^{-1}N : S^{-1}(Ax))_{S^{-1}A} = (S^{-1}N : x/1)_{S^{-1}A};$$

nên

$$\begin{aligned} S^{-1}((N : x)_A) &= S^{-1}((N : Ax)_A) \\ &= (S^{-1}N : S^{-1}(Ax))_{S^{-1}A} \\ &= (S^{-1}(N : x/1)_{S^{-1}A}, \end{aligned}$$

đó là điều phải chứng minh. $\square$

Mệnh đề 1.1.4. *Cho S là tập đóng nhân của A và M là $A-$môđun. Khi đó ta có*

$$\mathrm{Supp}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Chứng minh. " $\supseteq$ ": Lấy $P \in \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$. Khi đó tồn tại $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M)$ sao cho $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ và $P = S^{-1}\mathfrak{p}$. Suy ra $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Mặt khác theo [6, Hệ quả 4, trang 24 và Định lý 4.4, trang 26] và [1, Bài tập 2.15], ta có

$$\begin{aligned} (S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}} &\cong (M \otimes_A S^{-1}A) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}} \\ &\cong M \otimes_A \left[S^{-1}A \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}}\right] \\ &\cong M \otimes_A \left[(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}}\right] \\ &\cong M \otimes_A A_\mathfrak{p} \\ &\cong M_\mathfrak{p} \neq 0. \end{aligned}$$

Suy ra $S^{-1}\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ hay

$$\mathrm{Supp}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \supseteq \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

" $\subseteq$ ": Lấy $P \in \mathrm{Supp}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$. Suy ra $(S^{-1}M)_P \neq 0$ và tồn tại $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ sao cho $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, $P = S^{-1}\mathfrak{p}$. Vì $0 \neq (S^{-1}M)_P = (S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}} \cong M_\mathfrak{p}$, nên $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M)$. Do đó

$$\mathrm{Supp}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \subseteq \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. □

Tiếp theo ta nhắc lại sơ lược về lý thuyết iđêan nguyên tố liên kết.

Định nghĩa 1.1.5. *(Iđêan nguyên tố liên kết)* Cho M là một $A-$môđun và $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Ta nói $\mathfrak{p}$ là một *iđêan nguyên tố liên kết của M* nếu tồn tại một phần tử $0 \neq x \in M$ sao cho $\mathrm{Ann}_A(x) = \mathfrak{p}$. Tập các iđêan nguyên tố liên kết của M được ký hiệu bởi $\mathrm{Ass}_A(M)$ hoặc $\mathrm{Ass}(M)$.

Mệnh đề 1.1.6. *Cho A là vành Noether, S là tập đóng nhân của A và M là $A-$môđun. Khi đó ta có*

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Chứng minh. ($\subseteq$). Lấy $P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ khi đó tồn tại $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ và tồn tại $x/s \in S^{-1}M$ sao cho $P = S^{-1}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ và $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(x/s)$.

Tiếp theo ta chứng minh $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$. Vì A là Noether nên tồn tại $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{p}$ sao cho $\mathfrak{p} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Với mỗi $i = 1, \ldots, n$, ta có $a_i/1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ hay $(a_i/1)(x/s) = 0$; suy ra tồn tại $t_i \in S$ sao cho $a_i t_i x = 0$. Đặt $t = t_1 \ldots t_n$. Lúc đó $t \in S$ và $a_i(tx) = 0$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Do đó $a_i \in \mathrm{Ann}_A(tx)$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Vì thế $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Ann}_A(tx)$.

Mặt khác, lấy $b \in \mathrm{Ann}_A(tx)$ suy ra $b(tx) = 0$ suy ra $(bt/1)(x/s) = 0$. Do đó $(bt)/1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$. Suy ra tồn tại $a' \in \mathfrak{p}$, $s' \in S$ sao cho $(bt)/1 = a'/s'$. Từ đó có $u \in S$ để $b(uts') = ua' \in \mathfrak{p}$; suy ra $b \in \mathfrak{p}$ (vì $us't \in S$ mà $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ nên $us't \notin \mathfrak{p}$). Do đó $\mathrm{Ann}_A(tx) \subseteq \mathfrak{p}$.

Vậy $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(tx) \in \mathrm{Ass}_A(M)$. Nói cách khác

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \subseteq \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$