ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - o0o - - - - - - - - - - -

NGUYỄN THÀNH HIẾU

SỐ LŨY THỪA HOÀN HẢO VÀ GIẢ THUYẾT PILLAI

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Mở đầu

Số học nói chung và Phương trình nghiệm nguyên nói riêng là những lĩnh vực xa xưa nhất của Toán học, chúng cũng là những lĩnh vực còn tồn tại nhiều những bài toán, giả thuyết chưa có câu trả lời. Trong suốt quá trình phát triển của Toán học, Phương trình nghiệm nguyên luôn thu hút được nhiều người quan tâm nghiên cứu và tìm hiểu. Chính việc đi tìm lời giải cho các bài toán hay chứng minh các giả thuyết về phương trình nghiệm nguyên đã làm nảy sinh các lí thuyết, phương pháp khác của toán học. Các bài toán giải phương trình nghiệm nguyên không có quy tắc giải tổng quát, hoặc nếu có cũng chỉ là đối với những dạng đơn giản. Mỗi phương trình với dạng riêng của nó đòi hỏi phải có một cách giải đặc trưng phù hợp. Điều này có tác dụng rèn luyện tư duy toán học mềm dẻo, linh hoạt và sáng tạo cho người làm toán. Chính vì thế bài toán phương trình nghiệm nguyên có mặt trong các kì thi học sinh giỏi Toán quốc gia, quốc tế. Việc hệ thống một cách tương đối các phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên và đưa ra các vấn đề mở về phương trình nghiệm nguyên là cần thiết đối với việc giảng dạy và nghiên cứu toán học, đặc biệt là trong công tác ôn luyện học sinh giỏi.

Với lí do đó, trong luận văn này, trước tiên chúng tôi tổng hợp một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên thông qua các ví dụ cụ thể;. Phần tiếp theo sẽ dành để giới thiệu một số giả thuyết về các vấn đề liên quan đến phương trình nghiệm nguyên đang được quan tâm gần đây.

Nội dung luận văn gồm 2 chương.

Chương 1: Trình bày một số dạng phương trình nghiệm nguyên cơ bản và một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên thông qua các ví dụ cụ thể.

Chương 2: Trình bày về số lũy thừa hoàn hảo, giả thuyết Pillai về số lũy thừa hoàn hảo và một số vấn đề liên quan.

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn nhiệt tình của GS.TSKH. Hà Huy Khoái. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy, người đã dành cho tôi sự hướng dẫn chu đáo và nghiêm túc trong quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luân văn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô khoa Toán trường Đại Học Khoa Học – Đại Học Thái Nguyên cũng như các Thầy Cô tham gia giảng dạy khóa Cao học 2012-2014 đã giúp đỡ và động viên tôi rất nhiều trong quá trình học tập tại trường.

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 7 năm 2014

Tác Giả

Nguyễn Thành Hiếu

Chương 1

Phương trình nghiệm nguyên

1.1 Phương trình tuyến tính

Định nghĩa 1.1.1. Phương trình Diophantine tuyến tính là phương trình có dạng:

$$ax + by = c, \tag{1}$$

trong đó *a, b, c* là các số nguyên, đồng thời các biến *x, y* cũng chỉ nhận các giá trị nguyên.

Giải phương trình (1) là đi tìm các cặp số nguyên *(x, y)* thỏa mãn (1). Để giải phương trình (1) ta dựa vào định lí sau đây:

Định lí 1.1.2. *Giả sử a, b là các số nguyên dương, d là ước chung lớn nhất của a và b, d = (a, b). Khi đó phương trình $ax + by = c$ không có nghiệm nguyên nếu d không là ước của c. Nếu $d\,|c$ thì phương trình có vô số nghiệm. Hơn nữa nếu $x = x_0$, $y = y_0$ là một nghiệm nào đó của phương trình, thì mọi nghiệm của phương trình có dạng:*

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n,\ y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)n.$$

Trong đó n là số nguyên.

Chứng minh.

Giả sử (x, y) là một nghiệm của phương trình. Do $d\,|a$, $d\,|b$ nên $d\,|c$. Như vậy nếu d không là ước của c thì phương trình không có nghiệm nguyên.

Giả sử $d\,|c$. Khi đó, tồn tại các số nguyên s, t sao cho:

$$d = as + bt. \tag{2}$$

Do $d\,|c$ nên tồn tại e nguyên sao cho $de = c$. Nhân hai vế của (2) với e ta được:

$$c = de = (as + bt)e = a(se) + b(te).$$

Như vậy, ta có một ngiệm của phương trình cho bởi $x = x_0 = se$, $y = y_0 = te$.

Ta sẽ chứng minh tồn tại vô số nghiệm. Đặt $x = x_0 + \frac{b}{d}n$, $y = y_0 - \frac{a}{d}n$, trong đó n nguyên. Ta thấy cặp (x, y) xác định như trên là một nghiệm, vì $ax + by = ax_0 + a.\frac{b}{d}n + by_0 - b.\frac{a}{d}n = ax_0 + by_0 = c$.

Ta chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình phải có dạng nêu trên.

Giả sử (x, y) là một nghiệm tùy ý, tức là x, y nguyên và thỏa mãn $ax + by = c$. Khi đó:

$$(ax + by) - (ax_0 + by_0) = 0.$$

Suy ra:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Tức là:

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y).$$

Chia hai vế của đẳng thức cho d, ta được:

$$\tfrac{a}{d}(x - x_0) = \tfrac{b}{d}(y_0 - y). \tag{3}$$

Do $d = (a, b)$ nên $\frac{a}{d}$ và $\frac{b}{d}$ nguyên tố cùng nhau. Từ đó suy ra $y_0 - y \vdots \frac{a}{d}$, tức tồn tại n nguyên sao cho $\frac{a}{d}n = y_0 - y$. Suy ra $y = y_0 - \frac{a}{d}n$. Thay giá trị này của y vào phương trình (3) ta được $x = x_0 + \frac{b}{d}n$.

Ví dụ 1.1.3. Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $5x + 3y = 19$

Lời giải.

Ta có $(5, 3) = 1$. Do 1 là ước của 19 nên phương trình đã cho có nghiệm. Dễ thấy $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lí trên, các nghiệm của phương trình có dạng: $x = 2 + 3n$, $y = 3 - 5n$, với n là số nguyên.

1.2 Phương trình Fermat

1.2.1. Các bộ số Pitago

Bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$ được gọi là một bộ số Pitago. Ví dụ $\{3, 4, 5\}, \{6, 8, 10\}$ là bộ số Pitago.

Rõ ràng rằng, nếu (x, y, z) là bộ số Pitago thì (kx, ky, kz) cũng là một bộ số Pitago với mọi số tự nhiên k.

Bộ số Pitago (x, y, z) gọi là nguyên thủy nếu $(x, y, z) = 1$. Ví dụ $\{3, 4, 5\}, \{5, 12, 13\}$ là các bộ số Pitago nguyên thủy, bộ số $\{6, 8, 10\}$ không nguyên thủy.

Bổ đề 1.2.1. *Nếu (x, y, z) là một bộ số Pitago nguyên thủy thì $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$.*

Chứng minh.

Giả sử (x, y, z) là một bộ số Pitago nguyên thủy và $(x, y) > 1$. Khi đó tồn tại số nguyên tố p sao cho $p\,|(x, y)$. Vì $p\,|x$ và $p\,|y$ nên $p\,\left|(x^2 + y^2) = z^2\right.$. Do p nguyên tố mà $p\,\left|z^2\right.$ nên $p\,|z$, mâu thuẫn với giả thiết $(x, y, z) = 1$. Vậy $(x, y) = 1$.

Tương tự ta có $(x, z) = (y, z) = 1$.

Bổ đề 1.2.2. *Giả sử (x, y, z) là một bộ số Pitago nguyên thủy. Khi đó x chẵn, y lẻ hoặc x lẻ, y chẵn.*

Chứng minh.

Giả sử (x, y, z) là một bộ số Pitago nguyên thủy. Do Bổ đề 1.2.1, $(x, y) = 1$, nên x và y không thể cùng chẵn. Nếu x và y cùng lẻ thì ta có

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1(\mathrm{mod} 4),$$

nên

$$z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2(\mathrm{mod} 4).$$

Điều này vô lí. Vậy x và y không thể cùng lẻ.

Bổ đề 1.2.3. Giả sử r, s, t là các số nguyên dương sao cho $(r, s) = 1$ và $rs = t^2$. Khi đó tồn tại các số nguyên h và l sao cho $r = l^2$ và $s = h^2$.

Chứng minh.

Nếu $r = 1$ hoặc $s = 1$ thì bổ đề hiển nhiên đúng. Ta giả sử $r > 1$ và $s > 1$. Giả sử cách phân tích r, s, t ra thừa số nguyên tố có dạng sau:

$$r = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$$

$$s = p_{n+1}^{\alpha_{n+1}} p_{n+2}^{\alpha_{n+2}} ... p_m^{\alpha_m}$$

$$t = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} ... q_k^{\beta_k}.$$

Vì $(r, s) = 1$ nên các số nguyên tố xuất hiện trong các phân tích của r và s là khác nhau. Do $rs = t^2$ nên $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n} p_{n+1}^{\alpha_{n+1}} p_{n+2}^{\alpha_{n+2}} ... p_m^{\alpha_m} = q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} ... q_k^{2\beta_k}$

Từ Định lí cơ bản của Số học ta suy ra rằng, các lũy thừa nguyên tố xuất hiện ở hai vế của đẳng thức phải như nhau. Vậy, mỗi p_i phải bằng một q_j nào đó, đồng thời $\alpha_i = 2\beta_j$. Do đó, mỗi số mũ α_i đều chẵn nên $\frac{\alpha_i}{2}$ là số nguyên. Từ đó suy ra $r = l^2$, $s = h^2$, trong đó l, h là các số nguyên:

$$l = p_1^{\alpha_1/2} p_2^{\alpha_2/2} ... p_n^{\alpha_n/2}$$

$$h = p_{n+1}^{\alpha_{n+1}/2} p_{n+2}^{\alpha_{n+2}/2} ... p_m^{\alpha_m/2}.$$

Tất cả các bộ số Pitago nguyên thủy được mô tả trong định lí sau:

Định lí 1.2.4. *Các số nguyên dương x, y, z lập thành một bộ số Pitago nguyên thủy, với y chẵn nếu và chỉ nếu tồn tại các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau m, n với m>n, m lẻ, n chẵn hoặc m chẵn, n lẻ sao cho*

$$x = m^2 - n^2$$

$$y = 2mn$$

$$z = m^2 + n^2.$$

Chứng minh.

Giả sử (x, y, z) là bộ số Pitago nguyên thủy. Từ Bổ đề 1.2.2 ta thấy x lẻ, y chẵn, hoặc ngược lại. Vì ta giả thiết y chẵn nên x, z đều lẻ. Do $x + z$ và $z - x$ đều là số chẵn, nên các số $r = \frac{x+z}{2}$, $s = \frac{z-x}{2}$ đều là số nguyên.

Vì $x^2 + y^2 = z^2$ nên $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$. Vậy:

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{z+x}{2}\right)\left(\frac{z-x}{2}\right) = rs.$$

Để ý rằng $(r, s) = 1$. Thật vậy, nếu $(r, s) = d$ thì do $d\,|r\,, d\,|s$ nên $d\,|(r + s) = z$ và $d\,|(r - s) = x$. Điều đó có nghĩa là $d\,|(z, x) = 1$ nên $d = 1$.

Áp dụng Bổ đề 1.2.3 ta thấy rằng tồn tại các số nguyên m, n sao cho $r = m^2, s = n^2$. Viết x, y, z thông qua m, n ta có:

$$x = r - s = m^2 - n^2$$

$$y = \sqrt{4rs} = \sqrt{4m^2n^2} = 2mn$$

$$z = r + s = m^2 + n^2.$$

Ta chứng minh x, y, z nguyên tố cùng nhau. Giả sử ngược lại $(x, y, z) = d > 1$. Khi đó tồn tại số nguyên tố p sao cho $p\,|(x, y, z)$. Ta thấy rằng p không là ước của 2 vì x lẻ (do $x = m^2 - n^2$ trong đó m^2, n^2 không cùng tính chẵn lẻ). Lại do $p\,|x\,, p\,|z$ nên $p\,\big|(z + x) = 2m^2$ và $p\,\big|(z - x) = 2n^2$. Vậy $p\,|m\,, p\,|n$: mâu thuẫn với $(m, n) = 1$. Do đó $(x, y, z) = 1$ tức là (x, y, z) là một bộ số Pitago nguyên thủy.

1.2.2. Phương trình Fermat

Ta thấy rằng phương trình $x + y = z$ có vô hạn nghiệm nguyên (x, y, z). Các bộ số Pitago cũng cho ta vô hạn nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$. Vấn đề đặt ra là khi số mũ của các biến tăng lên, liệu rằng phương trình $x^n + y^n = z^n$ với $n \geq 3$ có nghiệm nguyên hay không ? nếu có thì số nghiệm là hữu hạn hay vô hạn?

Định lí 1.2.5.(Định lí Fermat). *Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên x, y, z khác 0 khi n là số nguyên dương, $n \geq 3$.*

Định lí Fermat được chứng minh năm 1993 bởi A. Wiles, với việc sử dụng những kiến thức cao nhất của nhiều ngành toán học khác nhau. Trong phần này chúng ta sẽ trình bày chứng minh định lí lớn Fermat cho trường hợp $n = 4$, mà mấu chốt của của chứng minh là phương pháp lùi vô hạn do Fermat đề xuất.