ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ THU HUYỀN

VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ THU HUYỀN

VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH LỒI

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: **60.46.01.12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS-TSKH LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - Năm 2014

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên của khóa luận này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy giáo hướng dẫn GS.TSKH. Lê Dũng Mưu, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thiện luận văn.

Trong quá trình học tập chương trình cao học tại trường Đại học khoa học - Đại học Thái nguyên, tôi đã nhận được sự giúp đỡ và sự giảng dạy tận tình của GS.TSKH Lê Dũng Mưu, GS.TS. Trần Vũ Thiệu, PGS. Nông Quốc Chinh, PGS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn, PGS.TS. Tạ Duy Phượng, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, cùng rất nhiều thầy cô công tác tại Viện Toán học Việt Nam, trường Đại học Thăng Long, trường Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thầy, các cô.

Nhận dịp này, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới các thầy giáo, cô giáo trường Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm, tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong suốt quá tình học tập.

Đồng thời, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới Trường THCS Hưng Đạo đã tạo điều kiện, tới gia đình và bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn tốt nghiệp.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng ghóp của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, ngày 11 tháng 08 năm 2014

Tác giả

Bùi Thị Thu Huyền

Mục lục

MỞ ĐẦU

Quy hoạch lồi là một bài toán cơ bản của lý thuyết tối ưu. một đặc trưng quan trọng của lớp bài toán này là nghiệm tối ưu địa phương đều là tối ưu toàn cục. Do đó các công cụ mang tính chất địa phương như giới hạn, đạo hàm... có thể sử dụng một cách rất hiệu quả cho lớp bài toán này.

Bài toán quy hoạch lồi xuất hiện trong nhiều vấn đề thực tế thuộc các lĩnh vực kinh tế, khoa học, kĩ thuật, môi trường... Bài toán này xuất hiện như một bài toán phụ trong các phương pháp giải bài toán tối ưu không lồi như tối ưu toàn cục, tối ưu rời rạc. Vì vậy việc nghiên cứu các phương pháp giải bài toán quy hoạch lồi là một đề tài quan trọng, luôn được sự quan tâm của nhiều người.

Mục đích của bản luận văn này là nhằm giới thiệu những điểm cơ bản của bài toán tối ưu lồi trong không gian Euclid hữu hạn chiều. Sau khi giới thiệu những điều kiện về sự tồn tại nghiệm, điều kiện tối ưu như định lý Karush-kuhn-Tucker, định lý Kuhn-Tucker... luận văn đi sâu vào giới thiệu một số phương pháp giải bài toán quy hoạch lồi có ràng buộc và không ràng buộc, khả vi và không khả vi.

Bản luận văn gồm 2 chương.

Chương 1: Nhằm mục đích giới thiệu các kiến thức cơ bản về hàm lồi, tập lồi sẽ được sử dụng trong chương sau. Ngoài ra trong chương này còn phát biểu bài toán và ví dụ, nêu sự tồn tại và tính chất của tập nghiệm, chỉ ra điều kiện tối ưu.

Chương 2: Trong chương này chúng ta nghiên cứu một số phương pháp giải bài toán quy hoạch lồi cơ bản đó là các phương pháp đạo hàm và dưới đạo hàm, phương pháp Newton và phương pháp hàm phạt.

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản

Chương này gồm ba mục. Mục 1.1 trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản. Mục 1.2 phát biểu bài toán và ví dụ. Mục 1.3 nói về sự tồn tại và tính chất của tập nghiệm. Mục 1.4 là điều kiện tối ưu. Kết quả và khái niệm dưới đây được lấy từ các tài liệu [1], [2], [3].

1.1 Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Trong bản luận văn này, chúng ta sẽ làm việc với không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Mỗi phần tử x trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một bộ n số thực và được viết dưới dạng cột số

$$x \ := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Mỗi số $x_i\,,\ i \in \{1, ..., n\}$, được gọi là tọa độ thứ i của điểm x. Để thuận tiện khi viết, ta quy ước vectơ chuyển vị của x là

$$x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)\,.$$

Cho hai véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$.
Tích vô hướng của x và y là:

$$\langle x, y\rangle \ := \ x_1y_1 \, + \, x_2y_2 \, + ... + \, x_ny_n.$$

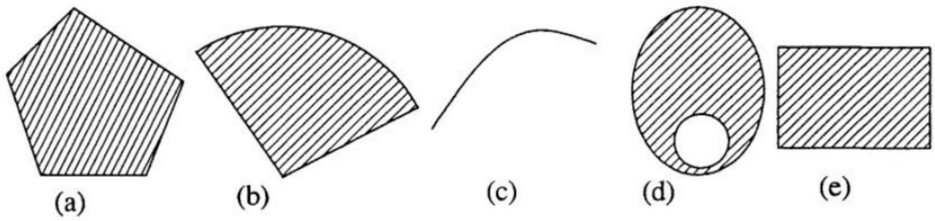
Ký hiệu chuẩn $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2}$.

Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân,...

Cho hai điểm $a,\ b \in \mathbb{R}^n$. Tập tất cả các điểm $x = (1-\lambda)\,a + \lambda b$ với $0 \leq \lambda \leq 1$ được gọi là đoạn thẳng (đóng) nối a và b, và ký hiệu $[a, b]$.

Định nghĩa 1.1. *Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một tập lồi nếu nó chứa trọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ thuộc nó. Tức là $(1-\lambda)\,a + \lambda b \in C$ với mọi $a,\ b \in C$ và mọi $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Các ví dụ về tập lồi và tập không lồi:



Hình 1.1: (a), (b), (e)-Tập lồi; (c), (d)- Tập không lồi

Định nghĩa 1.2. *Điểm $\mathbb{R}^n$ có dạng*

$$x = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a^i,$$

với

$$a^i \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

được gọi là một tổ hợp lồi của các điểm a^1, a^2, ..., a^k.

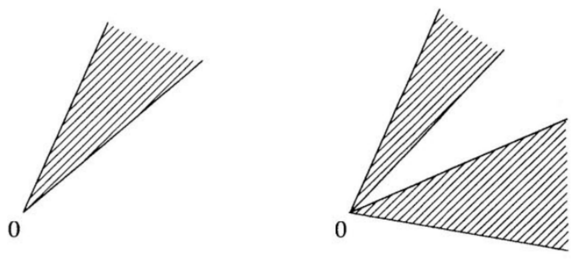
Tập C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các phần tử thuộc nó.

Định nghĩa 1.3. . *Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một nón nếu*

$$\forall x \in C,\quad \forall \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Một nón được gọi là nón lồi nếu nó là nón và là một tập lồi.

Tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ dưới đây luôn được giả thiết là một tập lồi (nếu không giải thích gì thêm).



Hình 1.2: Nón lồi và nón không lồi

Định nghĩa 1.4. *Cho $x \in C$, nón pháp tuyến ngoài của C tại x, kí hiệu là $N_C(x)$, được xác định bởi công thức*

$$N_C(x) := \{\mathrm{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \langle \mathrm{w}, y - x\rangle \leq 0, \quad \forall y \in C\}.$$

Định nghĩa 1.5. *Cho một tập lồi $C \subseteq \mathbb{R}^n$ và một điểm $y \in \mathbb{R}^n$. Ta gọi hình chiếu của y trên C là điểm $x^0 \in C$ sao cho*

$$\left\|x^0 - y\right\| = \min_{x \in C} \|x - y\| = d_C(y).$$

Ký hiệu $x^0 = p(y)$ và gọi $d_C(y)$ là khoảng cách từ y tới C.

Nếu C là một tập lồi đóng thì hình chiếu $p(y)$ luôn luôn tồn tại và duy nhất.

Định nghĩa 1.6. *Ta nói hai tập lồi khác rỗng C và D trong $\mathbb{R}^n$ tách được bởi siêu phẳng $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle t, x\rangle = \alpha\}$ với $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, nếu*

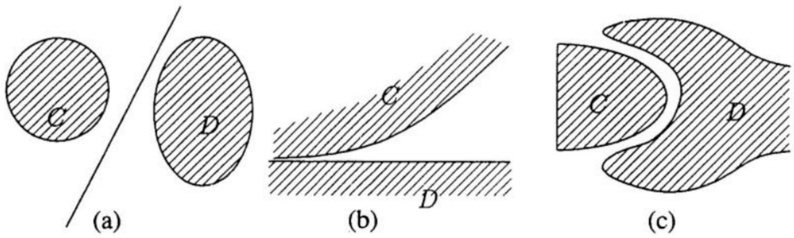
$$\inf_{x \in C} \langle t, x\rangle \geq \alpha \geq \sup_{y \in D} \langle t, y\rangle. \tag{1}$$

Định lý 1.7. *(Định lý tách I). Hai tập C và D trong $\mathbb{R}^n$ khác rỗng, không có điểm chung có thể tách được bởi một siêu phẳng, nghĩa là tồn tại véc tơ $t \in \mathbb{R}^n$ ($t \neq 0$) và một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho (1) thỏa mãn.*

Định nghĩa 1.8. *Ta nói hai tập lồi khác rỗng C, D trong $\mathbb{R}^n$ là tách hẳn bởi siêu phẳng $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle t, x\rangle = \alpha\}$, nếu*

$$\inf_{x \in C} \langle t, x\rangle > \alpha > \sup_{y \in D} \langle t, y\rangle. \tag{2}$$

Định lý 1.9. *(Định lý tách II). Hai tập lồi đóng C và D trong $\mathbb{R}^n$ khác rỗng, không cắt nhau với ít nhất một trong hai tập này là compact.Khi đó có thể tách hẳn bởi một siêu phẳng, nghĩa là tồn tại một véc tơ $t \in \mathbb{R}^n, t \neq 0$ và một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho (2) thỏa mãn.*



Hình 1.3: (a) Hai tập lồi C và D được tách hẳn bởi một siêu phẳng; (b) Hai tập lồi C và D được tách bởi siêu phẳng $\{x \in R^2 | x_2 = 0\}$ nhưng không tách hẳn được; (c) Hai tập C và D giao nhau bằng rỗng nhưng không thể tách được vì D không phải tập lồi

Định nghĩa 1.10. *Một tập được gọi là tập lồi đa diện, nếu nó là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng.*

Như vậy, theo định nghĩa, tập lồi đa diện là tập hợp nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính. Dạng tường minh của một tập lồi đa diện được cho như sau:

$$D := \left\{x \in \mathbb{R}^n | \left\langle a^j, x\right\rangle \leq b_j, j = 1, ..., m\right\}.$$

Hoặc nếu ta ký hiệu A là ma trận có m hàng là các véc tơ a^j $(j = 1, ..., m)$ và véc tơ $b^T = (b_1, ..., b_m)$, thì hệ trên viết được là:

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}.$$

Chú ý rằng do một phương trình $\langle a, x\rangle = b$ có thể viết một cách tương đương dưới dạng hai bất phương trình $\langle a, x\rangle \leq b$, $\langle -a, x\rangle \leq b$, nên tập nghiệm của một hệ hữu hạn các phương trình và bất phương trình cũng là một tập lồi đa diện.

Định nghĩa 1.11. *Hàm $f : S \to (-\infty, +\infty]$ xác định trên một tập hợp lồi $S \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một hàm lồi trên S nếu với mọi x, $y \in S$ và mọi* *số thực* $\lambda \in [0,1]$ *ta có*

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

+) Hàm f *được gọi là hàm lồi chặt trên* S *nếu với mọi* $x, y \in S$, $x \neq y$ *và mọi* $\lambda \in (0,1)$ *ta có*

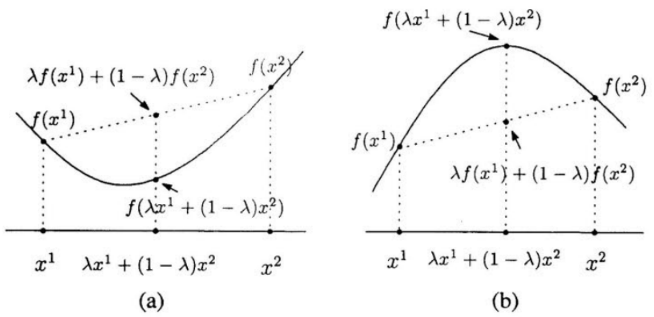
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

+) Hàm f *được gọi là hàm lõm (lõm chặt) trên* S *nếu* $-f$ *là lồi (lồi chặt) trên* S. *Hàm* f *được gọi là tuyến tính afin (hay đơn giản là afin) trên* S *nếu* f *vừa lồi vừa lõm trên* S.

Một hàm afin trên $\mathbb{R}^n$ có dạng $f(x) = \langle a, x\rangle + \alpha$ với $a \in \mathbb{R}^n$, như vậy với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Tuy nhiên, hàm afin không lồi chặt hay lõm chặt.



Hình 1.4: (a)-Hàm lồi; (b)-Hàm lõm

Định nghĩa 1.12. *Hàm* $f(x)$ *xác định trên một tập lồi* $C \subset \mathbb{R}^n$ *được gọi là lồi mạnh, nếu tồn tại hệ số* $\rho > 0$ *(hệ số lồi mạnh) sao cho với mọi* $\forall x, y \in C$ *và mọi số* $\lambda \in [0,1]$ *ta có bất đẳng thức:*

$$f[\lambda x + (1-\lambda) y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \lambda(1-\lambda)\rho\|x-y\|^2.$$

Có thể chứng minh rằng hàm $f(x)$ lồi mạnh khi và chỉ khi hàm $f(x) - \rho\|x\|^2$ lồi. Rõ ràng một hàm số lồi mạnh thì lồi chặt, nhưng điều ngược lại không chắc đúng. Chẳng hạn, hàm e^x với mọi $x \in \mathbb{R}$, lồi chặt nhưng không lồi mạnh.