ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ PHƯỢNG

SAI PHÂN DẠNG VÀ SỰ PHÂN DẠNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ PHƯỢNG

SAI PHÂN DẠNG VÀ SỰ PHÂN DẠNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN MINH KHOA

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

MỞ ĐẦU

Do nhu cầu của thực tiễn, việc nghiên cứu phương trình sai phân đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Nhiều bài toán thực tế (hệ thống mạng điện, quá trình sản xuất,quản lý xí nghiệp, điều tra dân số,...) được mô tả bởi phương trình sai phân. Các nghiên cứu định tính, các hệ điều khiển mô tả bởi phương trình sai phân đã được nghiên cứu khá đầy đủ, nhất là các phương trình sai phân tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều. Nhưng để tạo lập được cách tiếp cận phù hợp, hiệu quả, có tính hệ thống cho chương trình giảng dạy nâng cao hướng đến các kì thi olympic quốc gia và quốc tế đối với học sinh phổ thông, ở đây trong luận văn này tác giả trình bày một số nghiên cứu định tính và phân dạng phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng số. Luận văn gồm hai chương:

Chương 1. *Trình bày một số khái niệm về sai phân*

Chương 2. *Phân dạng các phương trình sai phân tuyến tính*

Để hiểu và trình bày vấn đề một cách dễ dàng, tác giả đã cố gắng chứng minh chi tiết các tính chất, giải tường minh các ví dụ miêu tả. Đặc biệt làm sáng tỏ các khái niệm và các kết quả, các ví dụ được tính toán cẩn thận, đầy đủ và chi tiết. Các tính toán này thường không được trình bày trong các tài liệu trích dẫn.

Tác giả chân thành cảm ơn thầy TS.Nguyễn Minh Khoa - Trưởng khoa Khoa học cơ bản, ĐH Điện Lực, người thầy đã hướng dẫn tận tâm tác giả hoàn thành luận văn này. Xin được cảm ơn trường ĐH Khoa học (ĐH Thái Nguyên) nơi tác giả hoàn thành chương trình cao học dưới sự giảng dạy nhiệt tình của các thầy cô. Cuối cùng xin được cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tác giả vượt qua nhiều khó khăn để hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 8, 2014

Tác giả

Đỗ Thị Phượng

Chương 1

MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ SAI PHÂN

Các định nghĩa, định lý và các tính chất liên quan tới sai phân trong chương này được trích theo tài liệu [1], [4].

1.1 Các khái niệm cơ bản về sai phân

1.1.1 Định nghĩa sai phân

a. Định nghĩa sai phân bậc một

Ta gọi sai phân hữu hạn bậc một của hàm số $x(n) = x_n$ với $n \in \mathbb{N}$ là hiệu

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Ví dụ 1.1. *Hàm x_n cho ở dạng bảng*

n	0	1	2	3	4
x_n	1	2	4	7	5

Có các sai phân hữu hạn bậc một là $\Delta x_0 = x_1 - x_0 = 2 - 1 = 1$; $\Delta x_1 = x_2 - x_1 = 2$; $\Delta x_2 = x_3 - x_2 = 3$; $\Delta x_3 = x_4 - x_3 = -2$.

b. Định nghĩa sai phân cấp cao

Ta gọi sai phân cấp 2 của hàm x_n là sai phân của sai phân bậc một của x_n và nói chung sai phân cấp k của hàm x_n là sai phân của sai phân cấp $k - 1$ của nó.

Từ đó ta có các công thức của sai phân cấp cao như sau.

- Sai phân cấp 2 của hàm x_n là

$$\begin{aligned}\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n &= x_{n+2} - x_{n+1} - (x_{n+1} - x_n)\\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n\end{aligned}$$

- Sai phân cấp 3 của hàm số x_n là

$$\begin{aligned}\Delta^3 x_n = \Delta(\Delta^2 x_n) &= \Delta^2 x_{n+1} - \Delta^2 x_n\\ &= x_{n+3} - 2x_{n+2} + x_{n+1} - (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)\\ &= x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n.\end{aligned}$$

- Tổng quát sai phân cấp k của x_n là
$\Delta^k x_n = \Delta(\Delta^{k-1} x_n) = \Delta^{k-1} x_{n+1} - \Delta^{k-1} x_n = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x_{n+k-i}.$

Ví dụ 1.2. *Xét hàm x_n trong ví dụ 1.1 ta có:*
$\Delta^2 x_0 = x_2 - 2x_1 + x_0 = 1; \Delta^2 x_1 = x_3 - 2x_2 + x_1 = 1;$
$\Delta^2 x_2 = x_4 - 2x_3 + x_2 = -5; \Delta^3 x_0 = x_3 - 3x_2 + 3x_1 - x_0 = 0;$
$\Delta^3 x_1 = x_4 - 3x_3 + 3x_2 - x_1 = 6;$
$\Delta^4 x_0 = x_4 - 4x_3 + x_2 - 4x_1 + x_0 = -7.$

1.1.2 Tính chất của sai phân

Tính chất 1.1. Sai phân các cấp đều có thể biểu diễn qua các giá trị hàm số theo công thức

$$\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x_{n+k-i}. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta chứng minh công thức (1.1) theo phương pháp qui nạp.
Với $k = 1$ ta có: $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = C_1^0 x_{n+1} - C_1^1 x_n$, công thức (1.1) đúng.
Giả sử (1.1) đúng với k tức là ta có giả thiết qui nạp

$$\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x_{n+k-i}.$$

Ta chứng minh (1.1) đúng với $k+1$ tức là:

$$\Delta^{k+1}x_n = \Delta^k x_{n+1} - \Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x_{n+1+k-i} - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x_{n+k-i}.$$

Ở tổng thứ hai ta đổi chỉ số $i = i' - 1$, sau đó thay $i' = i$ ta nhận được

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x_{n+k-i} = \sum_{i'=1}^{k+1}(-1)^{i'-1} C_k^{i'-1} x_{n+k+1-i'}.$$

Do đó ta nhận được:

$$\begin{aligned}
\Delta^{k+1}x_n \; &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x_{n+k+1-i} + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i C_k^{i-1} x_{n+k+1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i C_k^i x_{n+k+1-i} + x_{n+k+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i C_k^{i-1} x_{n+k+1-i} \\
+(-1)^{k+1}x_n & \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i (C_k^i + C_k^{i-1}) x_{n+k+1-i} + x_{n+k+1} + (-1)^{k+1}x_n \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i C_{k+1}^i x_{n+k+1-i} + x_{n+k+1} + (-1)^{k+1}x_n \\
&= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i C_{k+1}^i x_{n+k+1-i}.
\end{aligned}$$

Vậy công thức (1.1) đúng với $k+1$, theo nguyên lý qui nạp công thức (1.1) đúng với mọi giá trị $k \in \mathbb{N}$.

Tính chất 1.2. Sai phân mọi cấp của hàm số là một toán tử tuyến tính.

Chứng minh. Ta phải chứng minh

$$\begin{aligned}
\Delta^k(\alpha x_n + \beta y_n) \; &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i (\alpha x_{n+k+i} + \beta y_{n+k-i}) \\
&= \alpha \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x_{n+k-i} + \beta \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i y_{n+k-i} \\
&= \alpha \Delta^k x_n + \beta \Delta^k y_n.
\end{aligned}$$

Tính chất 1.3. Sai phân cấp k của đa thức bậc m là:

1. Đa thức bậc $m-k$ nếu $k<m$.
2. Hằng số, nếu $k=m$.
3. Bằng 0 nếu $k>m$.

Chứng minh. Do tính chất 2, sai phân mọi cấp là toán tử tuyến tính, nên ta chỉ việc chứng minh cho đơn thức $P_m(n)=n^m$ là đủ.

1. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta n^m &= (n+1)^m - n^m\\ &= C_m^0 + C_m^1 n + ... + C_m^m n^m - n^m\\ &= C_m^0 + C_m^1 n + ... + C_m^{m-1} n^{m-1} = P_{m-1}(n).\end{aligned}$$

   Giả sử tính chất này đúng với $k=s<m$ ta chứng minh nó đúng với $k=s+1<m$.
   Ta có $\Delta^{s+1}n^m = \Delta(\Delta^s n^m) = \Delta^s(n+1)^m - \Delta^s n^m = \Delta P_{m-s}(n) = P_{m-s-1}(n)$.
   Vậy ta có tính chất trên đúng với $k=s+1<m$.
   Tức là ta đã chứng minh được (1) theo nguyên lý quy nạp.
2. Khi $k=m$,(theo chứng minh 1), ta có

$$\Delta^m n^m = P_{m-m}(n) = P_0(n) = C(\text{const}).$$

3. Khi $k>m$ ta có

$$\Delta^k n^m = \Delta^{k-m}(\Delta^m n^m) = \Delta^{k-m}C = \Delta^{k-m-1}(\Delta C) = 0.$$

Tính chất 1.4.

$$\sum_{n=n_0}^{N} \Delta^k x_n = \Delta^{k-1}x_{N+1} - \Delta^{k-1}x_{n_0} \text{ với } k\in\mathbb{Z}^+.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{N}\Delta^k x_n &= \sum_{n=n_0}^{N}\Delta(\Delta^{k-1}x_n)\\ &= \Delta^{k-1}x_{n_0+1} - \Delta^{k-1}x_{n_0} + ... + \Delta^{k-1}x_{N+1} - \Delta^{k-1}x_N\\ &= \Delta^{k-1}x_{N+1} - \Delta^{k-1}x_{n_0}.\end{aligned}$$

Tính chất 1.5. Công thức sai phân từng phần

$$\Delta(x_k.y_k) = x_k\Delta y_k + y_{k+1}\Delta x_k.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta(x_k.y_k) &= x_{k+1}y_{k+1} - x_ky_k\\ &= x_{k+1}y_{k+1} - x_ky_{k+1} + x_ky_{k+1} - x_ky_k\\ &= y_{k+1}(x_{k+1} - x_k) + x_k(y_{k+1} - y_k)\\ &= x_k\Delta y_k + y_{k+1}\Delta x_k.\end{aligned}$$

Tính chất 1.6. (Tổng sai phân) $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = x_{k+1} - x_1.$

Chứng minh

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k &= \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_{n-1} + \Delta x_n\\ &= x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + ... + x_n - x_{n-1} + x_{n+1} - x_n\\ &= x_{n+1} - x_1.\end{aligned}$$

1.2 Áp dụng

1.2.1 Áp dụng tính tổng

Ví dụ 1.3. *Tính tổng* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 3^{k-1}\sin^3\dfrac{x}{3^k}.$

Xuất phát từ hệ thức sau và tính chất của tổng sai phân

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x]$$

ta nhận được $S_n = \dfrac{1}{4}[3^n \sin\dfrac{x}{3^n} - \sin x].$

Ví dụ 1.4. *Tính tổng* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k+1}\tan^2\dfrac{x}{2^k}.\tan\dfrac{x}{2^{k-1}}.$