ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THÁI LINH

GHÉP CẶP VÀ BÀI TOÁN PHÂN VIỆC TRÊN ĐỒ THỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THÁI LINH

GHÉP CẶP VÀ BÀI TOÁN PHÂN VIỆC TRÊN ĐỒ THỊ

Chuyên ngành:	Toán ứng dụng
Mã số:	60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS. TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên, năm 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn, chỉ bảo tận tình và giúp đỡ nghiêm túc của GS.TS. Trần Vũ Thiệu (Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp thắc mắc của tôi. Thầy đã giúp đỡ tôi bổ sung nhiều về kiến thức, khả năng nghiên cứu, chọn lọc và tổng hợp các tài liệu để hoàn thành luận văn. Tôi xin kính chúc Thầy và gia đình luôn luôn mạnh khỏe, hạnh phúc.

Qua đây, tôi xin gửi tới các quý Thầy, Cô tham gia giảng dạy khóa Cao học Toán 2012 - 2014 tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học lời cảm ơn sâu sắc nhất. Các Thầy, Cô đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích, không chỉ về mặt chuyên môn mà còn cả ở trong cuộc sống.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp, đồng môn đã giúp đỡ tôi trong thời gian học tập tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến gia đình tôi. Những người đã động viên, chăm sóc và tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi có được thành quả ngày hôm nay.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2014

Người thực hiện

Đỗ Thị Thái Linh

Lời mở đầu

Ghép cặp trên đồ thị là một trong những chủ đề cổ điển, nhưng quan trọng và hấp dẫn của lý thuyết tổ hợp và tối ưu hóa. Lý thuyết ghép cặp có ứng dụng đa dạng trong lý thuyết và thực tiễn. Thuật toán Hung-ga-ri (1955) giải bài toán phân việc và thuật toán Gale - Shapley (1962) giải bài toán "hôn nhân bền vững" đã rất quen thuộc và được sử dụng rộng rãi. Bài toán phân việc (cũng gọi là bài toán ghép cặp hoàn hảo với trọng số nhỏ nhất hay lớn nhất trong đồ thị hai phần) có ứng dụng thiết thực trong kinh tế và đời sống. Vì thế, chủ đề ghép cặp và phân việc luôn được nhiều người quan tâm nghiên cứu và ứng dụng.

Mục tiêu chính của đề tài luận văn là tìm hiểu và trình bày một số kết quả lý thuyết về bài toán ghép cặp cực đại và ghép cặp hoàn hảo trên đồ thị (chủ yếu là đồ thị hai phần), các điều kiện tồn tại ghép cặp cực đại và ghép cặp hoàn hảo, bài toán phân việc và các ứng dụng của ghép cặp, các thuật toán giải bài toán ghép cặp, bài toán phân việc và phân tích độ phức tạp của các thuật toán.

Nội dung luận văn được chia thành ba chương:

Chương 1: "*Khái niệm cơ bản về đồ thị*" trình bày và giải thích bằng ví dụ các định nghĩa và khái niệm cơ bản thường dùng trong lý thuyết đồ thị và mạng: đồ thị vô hướng, đồ thị có hướng, đỉnh và cạnh, đường đi và chu trình trong đồ thị, đồ thị liên thông. Miêu tả nhiều dạng đồ thị con khác nhau: đồ thị con cảm sinh, đồ thị con bao trùm của một đồ thị và các dạng đồ thị đặc biệt: rừng và cây cùng các tính chất, đồ thị đầy đủ, đồ thị hai phần. Một số cách biểu diễn đồ thị (ma trận kề, ma trận liên thuộc, danh sách cạnh, danh sách kề) đáng được chú ý. Hai cách tìm kiếm trên đồ thị (theo chiều rộng BFS và theo chiều sâu DFS) rất hay được dựng trong các thuật toán về đồ thị.

Chương 2: "*Bài toán ghép cặp trên đồ thị*" giới thiệu bài toán ghép cặp cực đại, ghép cặp hoàn hảo trên đồ thị, điều kiện cần và đủ để tồn tại ghép cặp cực đại trên đồ thị bất kỳ (định lý Berge) và ghép cặp hoàn hảo trên đồ thị hai phần (định lý Hall và định lý Frobenius). Trình bày cách đưa bài toán ghép cặp cực đại trên đồ thị hai phần về bài toán luồng lớn nhất trên mạng và hai thuật toán đa thức tìm ghép cặp cực đại trên đồ thị hai phần: thuật toán Edmonds với độ phức tạp tính toán $O(m.n)$ và thuật toán Hopcroft - Karp với độ phức tạp tốt nhất $O(\sqrt{n}.m)$.

Chương 3: "*Một số ứng dụng của ghép cặp*" trình bày bài toán phân việc mà thực chất là bài toán ghép cặp có trọng số lớn nhất (hay nhỏ nhất) trên đồ thị hai phần và giới thiệu thuật toán gán nhãn giải bài toán với tên gọi phương pháp Hung-ga-ri, thuật toán này do Kuhn và Munkres nêu ra đầu tiên (1955). Tiếp theo luận văn trình bày một số ứng dụng quan trọng khác của ghép cặp là bài toán phủ cạnh trên đồ thị, bài toán "hôn nhân bền vững" và thuật toán Gale - Shapley độc đáo giải bài toán. Cuối chương là bài toán xếp lịch trên hai máy, bài toán này đưa được về bài toán ghép cặp cực đại trên đồ thị hai phần.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định, kính mong quý thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tôi tiếp tục hoàn thiện luận văn này.

Chương 1

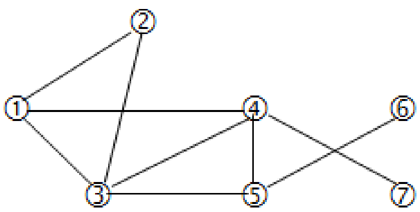
Khái niệm cơ bản về đồ thị

Chương này trình bày những định nghĩa và khái niệm cơ bản thường dùng trong lý thuyết đồ thị, nhằm thống nhất tên gọi và cách hiểu các vấn đề sẽ được đề cập tới trong luận văn. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [3], [5] và [7].

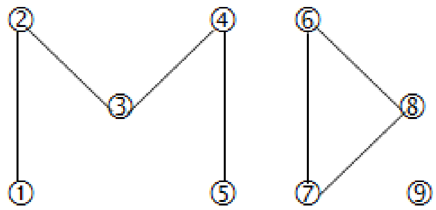
1.1 Đồ thị và mạng

1.1.1 Khái niệm đồ thị

Có thể hiểu đồ thị là một tập hợp các điểm, gọi là nút hay đỉnh, và một tập hợp các đoạn (thẳng hay cong) nối liền một số cặp điểm này, gọi là cạnh hay cung của đồ thị. Mỗi đỉnh của đồ thị thường được ký hiệu bằng các chữ cái a, b, c ... hoặc các chữ số 1, 2, 3, ... Cạnh nối đỉnh i với đỉnh j được ký hiệu là (i, j). Nếu đồ thị G có tập đỉnh là V và tập cạnh là E thì ta viết $G = (V, E)$. Ta cũng dùng ký hiệu $V(G)$ để chỉ tập đỉnh và $E(G)$ để chỉ tập cạnh của đồ thị G. Ký hiệu $n = |V(G)|$ là số đỉnh và $m = |E(G)|$ là số cạnh của đồ thị.



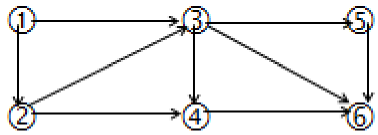
Hình 1.1: Đồ thị đỉnh và cạnh



Hình 1.2: Đồ thị không liên thông

Mỗi đồ thị có thể được biểu diễn bởi một hình vẽ trên mặt phẳng. Chẳng hạn: Hình 1.1 biểu diễn một đồ thị có 7 đỉnh (đánh số từ 1 đến 7) và 9 cạnh (mỗi cạnh là một đoạn thẳng nối hai đỉnh). Chú ý rằng điểm cắt nhau của hai cạnh (1, 4) và (2, 3), cũng như của hai cạnh (4, 7) và (5, 6) trong hình vẽ không phải là đỉnh của đồ thị.

Một cạnh của đồ thị gọi là cạnh có hướng nếu có quy định rõ một mút của cạnh là đỉnh đầu, còn mút kia là đỉnh cuối. Cạnh có hướng còn gọi là cung, cung đi từ đỉnh i đến đỉnh j ký hiệu là $\overrightarrow{(i,j)}$ hoặc đơn giản là (i,j) nếu không gây nhầm lẫn.



Hình 1.3: Đồ thị có hướng

Một đồ thị gồm toàn các cạnh gọi là đồ thị vô hướng, đồ thị gồm toàn các cung gọi là đồ thị có hướng. Một đồ thị vừa có cạnh vừa có cung gọi là đồ thị hỗn hợp. Bằng cách thay một cạnh bởi hai cung có hướng ngược chiều nhau, ta có thể quy mọi đồ thị về đồ thị có hướng. Hình 1.3 mô tả một đồ thị có hướng.

Nếu $e = (u, v)$ là một cạnh thì ta nói e liên thuộc hai đỉnh u, v hoặc e nối u, v. Khi đó, u và v gọi là kề nhau và là đầu mút của e, $u(v)$ là láng giềng của $v(u)$. Khi $e = (u, v)$ là cung, ta nói u là đỉnh đầu, v là đỉnh cuối và e đi khỏi u và đi tới v. Hai cạnh (cung) e và e' gọi là kề nhau nếu chúng có đỉnh chung.

Hai cạnh e, e' cùng nối liền hai đỉnh giống nhau gọi là cạnh kép. Đồ thị không có cạnh kép gọi là một đơn đồ thị. Trái lại, gọi là đa đồ thị.

Bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc nó, ký hiệu là $\rho(v)$. Đỉnh có bậc 0 gọi là đỉnh cô lập, đỉnh có bậc 1 gọi là đỉnh treo. Tương tự, trong đồ thị có hướng ta gọi bậc ra (bậc vào) của đỉnh v là số cung đi khỏi v (số cung đi tới v), ký hiệu tương ứng là $\rho^+(v)$ và $\rho^-(v)$.

Trong đồ thị vẽ ở Hình 1.2 ta thấy: $\rho(9) = 0$ nên 9 là đỉnh cô lập; $\rho(1) = \rho(5) = 1$ nên 1 và 5 là đỉnh treo; $\rho(2) = \rho(3) = \rho(4) = \rho(6) = \rho(7) = \rho(8) = 2$.

Dễ chứng minh các tính chất sau đây về bậc của đỉnh trong đồ thị.

Mệnh đề 1.1. *a) Trong đồ thị vô hướng, tổng bậc của mọi đỉnh bằng hai lần số cạnh của đồ thị và số đỉnh có bậc lẻ bao giờ cũng là một số chẵn.*

b) Trong đồ thị có hướng, tổng các bậc vào của mọi đỉnh bằng tổng các bậc ra (của mọi đỉnh) và bằng tổng số cung của đồ thị.

Nhiều tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng các cung trong đồ thị. Vì thế, khi bỏ qua hướng trên các cung (đổi cung thành cạnh) ta sẽ nhận được một đồ thị vô hướng, gọi là đồ thị nền của đồ thị có hướng đã cho.

Đồ thị con hay đồ thị bộ phận của một đồ thị G là đồ thị nhận được từ G bằng cách bỏ đi một số đỉnh và một số cạnh của nó. Nói chính xác, $H = (V(H), E(H))$ là một đồ thị con của G nếu $V(H) \subseteq V(G)$ và $E(H) \subseteq E(G)$. Ta nói H là đồ thị con cảm sinh của đồ thị G nếu $V(H) \subseteq V(G)$ và $E(H) = \{(x, y) \in E(G) : x, y \in V(H)\}$. Đồ thị con H của G gọi là đồ thị con bao trùm nếu $V(H) = V(G)$. Một đồ thị có đỉnh, nhưng không có cạnh nào gọi là một đồ thị rỗng.

Với đồ thị vô hướng G và $X, Y \subseteq V(G)$ ta định nghĩa:

$$E(X, Y) = \{(x, y) \in E(G) : x \in X \backslash Y, y \in Y \backslash X\}.$$

Với đồ thị vô hướng G và $X \subseteq V(G)$ ta định nghĩa:

$$\delta(X) = E(X, V(G) \backslash X).$$

Tập đỉnh láng giềng của X ký hiệu là:

$$N(X) = \{v \in V(G) \backslash X : E(X, \{v\}) \neq \emptyset\}.$$

1.1.2 Đường và chu trình trong đồ thị vô hướng

Đường P từ đỉnh u tới đỉnh v là một dãy liên tiếp các cạnh có dạng: $(a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{k-1}, a_k)$ với $(a_{i-1}, a_i) \in E(G)$, $a_0 = u, a_k = v$ và $k \geqslant 1$, trong đó các đỉnh $a_0, a_1, ..., a_k$ đều khác nhau. Để đơn giản, ta viết $P = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ và nói đó là đường nối đỉnh u và đỉnh v. Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, đỉnh v gọi là đỉnh cuối của P. Một đường nối một đỉnh tới chính nó (đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối) gọi là một chu trình. Độ dài của đường (chu trình) là số cạnh của đường (chu trình) đó.

Ví dụ 1.1. *Với đồ thị vẽ ở Hình 1.1, một đường nối đỉnh* 1 *và đỉnh* 6 *là:* $(1, 4)$*,* $(4, 5)$*,* $(5, 6)$ *hay đơn giản là* $1, 4, 5, 6$*. Hai đường khác từ* 1 *đến* 6 *là* $1, 3, 4, 5, 6$ *và* $1, 2, 3, 5, 6$*, ... Đồ thị này có các chu trình sau:*

$$(1,2),(2,3),(3,1); (1,4),(4,5),(5,3),(3,1); \ldots$$

Đường và chu trình trong đồ thị có hướng được định nghĩa tương tự (cung thay cho cạnh). Để phân biệt, đôi khi ta gọi đó là đường (chu trình) định hướng. Đồ thị có hướng ở Hình 1.3 có các đường định hướng từ đỉnh 1 tới đỉnh 6 là: 1, 3, 6; 1, 3, 4, 6; 1, 3, 5, 6; 1, 2, 4, 6 ... Đồ thị đó không có chu trình định hướng.

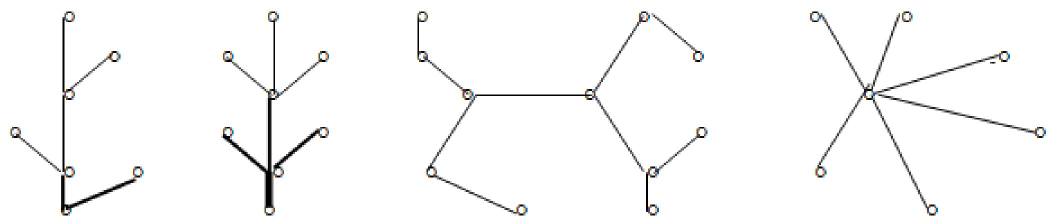
1.1.3 Rừng và cây

Một đồ thị vô hướng gọi là liên thông nếu có đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của đồ thị. Trái lại, đồ thị gọi là không liên thông. Đồ thị không liên thông sẽ bị tách thành một số đồ thị con liên thông, đôi một không có đỉnh chung. Mỗi đồ thị con liên thông như thế gọi là một thành phần liên thông. Đôi khi ta đồng nhất thành phần liên thông với tập đỉnh của nó. Tập đỉnh X được gọi là liên thông nếu đồ thị con sinh bởi X là liên thông. Cạnh e gọi là một cầu nếu loại bỏ e thì đồ thị tăng số thành phần liên thông.

Ví dụ 1.2. *Đồ thị vẽ ở Hình 1.1 là liên thông, trong khi đồ thị vẽ ở Hình 1.2 là không liên thông (gồm* 3 *thành phần liên thông:* $\{1,2,3,4,5\}$*;* $\{6,7,8\}$*;* $\{9\}$*).*

Mệnh đề 1.2. *Đồ thị vô hướng G là liên thông khi và chỉ khi $\delta(X) \neq \emptyset$ với mọi $\emptyset \neq X \subset V(G)$.*

Một đồ thị vô hướng không chứa chu trình gọi là một rừng. Một rừng liên thông gọi là một cây. Rừng có thể gồm nhiều thành phần liên thông khác nhau, mỗi thành phần liên thông là một cây. Như vậy, rừng có thể gồm nhiều cây. Đỉnh có bậc 1 trong cây gọi là một lá.



a. Rừng (không liên thông) b. Cây (liên thông) c. Đồ thị hình sao

Đồ thị hình sao là một cây có nhiều nhất một đỉnh không phải là lá. Một đồ thị con, không chứa chu trình của đồ thị G gọi là một cây của G. Một đồ thị con bao trùm của G mà là một cây được gọi là cây bao trùm của G.