ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THU HỢP

PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN VỀ ĐỘ UỐN CỦA BẢN CÓ GIÁ ĐỠ

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. VŨ VINH QUANG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành luận văn này, tôi đã nhận được sự động viên đóng góp nhiệt tình từ các thầy cô giáo của trường ĐHKH – Đại học Thái Nguyên, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô giáo. Đặc biệt tôi gửi lời cảm ơn sâu sắc tới TS. Vũ Vinh Quang là người thầy đã đề xuất các hướng nghiên cứu, động viên thường xuyên và tận tâm chỉ bảo nghiêm túc về chuyên môn trong suốt thời gian qua để tôi hoàn thành luận văn này. Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn đối với gia đình, bạn bè và người thân đã động viên khuyến khích và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2014

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Trong thực tế, khi nghiên cứu các bài toán cơ học và vật lý kỹ thuật bằng cách mô hình hóa, bài toán thường dẫn đến các dạng phương trình elliptic cấp 2 hoặc các dạng phương trình song điều hòa với các điều kiện biên khác nhau. Khi điều kiện biên của bài toán đang xét không tồn tại các điểm kì dị thì đã có nhiều phương pháp của các tác giả trên thế giới để tìm nghiệm gần đúng của các bài toán tương ứng như phương pháp sai phân, phương pháp phần tử hữu hạn…

Trong trường hợp khi điều kiện biên của bài toán tồn tại các điểm kì dị là các điểm phân cách giữa các loại điều kiện biên hàm và đạo hàm, điều này thường sảy ra với mô hình các bài toán cơ học và vật liệu đàn hồi. Khi đó các phương pháp tìm nghiệm thông thường sẽ gặp khó khăn. Đối với các bài toán thuộc dạng này, để tìm nghiệm xấp xỉ ta có thể sử dụng phương pháp tích phân biên hàm kì dị tìm nghiệm dưới dạng khai triển thông qua các hệ hàm cơ sở. Một hướng nghiên cứu khác đó là xây dựng các sơ đồ lặp dựa trên tư tưởng chia miền.

Mục đích chính của luận văn là tìm hiểu bài toán về độ uốn của bản có giá đỡ bên trong, một trong những bài toán điển hình trong cơ học. Mô hình toán học của bài toán là bài toán song điều hòa với điều kiện biên kì dị. Xây dựng các sơ đồ lặp dựa trên tư tưởng chia miền tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán. Đồng thời tiến hành thực nghiệm tính toán để kết luận sự hội tụ của các phương pháp lặp. Nội dung của luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Trình bày những kết quả lý thuyết quan trọng về các không gian Sobolev, bất đẳng thức Green, bất đẳng thức Poincare, phương trình elliptic với khái niệm nghiệm yếu và các bài toán biên, lý thuyết về phương pháp lặp toán tử.

Chương 2: Trình bày kiến thức về bài toán song điều hòa, cơ sở của phương pháp lặp kết hợp giải bài toán song điều hòa với điều kiện biên hỗn hợp mạnh.

Chương 3: Nghiên cứu mô hình bài toán về độ uốn của bản có giá đỡ, trên cơ sở của phương pháp chia miền và phương pháp lặp luận văn đưa ra sơ đồ lặp giải bài toán về độ uốn của bản có giá đỡ bên trong, tiến hành thực nghiệm kiểm tra tính đúng đắn của phương pháp đã đưa ra. Trong luận văn, các chương trình thực nghiệm được lập trình trên ngôn ngữ Matlab chạy trên máy tính PC.

Mặc dù đã rất cố gắng xong nội dung của luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được những đóng góp của các thầy cô giáo và các anh chị em bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong chương này, luận văn trình bày những kết quả lý thuyết quan trọng về các không gian Sobolev, bất đẳng thức Green, bất đẳng thức Poincare, phương trình elliptic với khái niệm nghiệm yếu và các bài toán biên, lý thuyết về phương pháp lặp toán tử. Các kết quả này là nền tảng về mặt lý thuyết được sử dụng trong các chương sau của luận văn.

1.1. Không gian Sobolev.

1.1.1. Không gian $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$

Giả sử Ω là một miền bị chặn trong không gian Euclid n chiều $\mathbb{R}^n$ và $\overline{\Omega}$ là bao đóng của Ω. Ta kí hiệu $C^k\left(\overline{\Omega}\right), \left(k = 0, 1, 2\ldots\right)$ là tập các hàm có đạo hàm đến cấp k kể cả k trong Ω, liên tục trong $\overline{\Omega}$. Ta đưa vào $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ chuẩn:

$$\|u\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)} = \sum_{|\alpha| = k} \max_{x \in \overline{\Omega}} \left|D^{\alpha} u\left(x\right)\right|$$

trong đó $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$ được gọi là đa chỉ số vectơ với các tọa độ nguyên không âm, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$:

$$D^{\alpha} u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Sự hội tụ theo chuẩn đã cho là sự hội tụ đều trong $\overline{\Omega}$ của các hàm và tất cả đạo hàm của chúng đến cấp k. Rõ ràng tập $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ với chuẩn đã cho là không gian Banach.

1.1.2. Không gian $L^p(\Omega)$

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và p là một số thực dương. Ta kí hiệu $L^p(\Omega)$ là lớp các hàm đo được f xác định trên Ω sao cho:

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \qquad (*)$$

Trong $L^p(\Omega)$ ta đồng nhất các hàm bằng nhau hầu khắp trên Ω. Như vậy các phần tử của $L^p(\Omega)$ là các lớp tương đương các hàm đo được thỏa mãn (*) và hai hàm tương đương nếu chúng bằng nhau hầu khắp trên Ω. Vì :

$$|f(x)+g(x)|^p \le \left(|f(x)+g(x)|\right)^p \le 2^p\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right)$$

nên rõ ràng $L^p(\Omega)$ là một không gian vectơ.

Ta đưa vào $L^p(\Omega)$ phiếm hàm $\|.\|_p$ được xác định bởi:

$$\|u\|_p = \left\{\int_\Omega |u(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

1.1.2.1 Định lý. (Bất đẳng thức Hoder).

Nếu $1 \le p < \infty$ và $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^p(\Omega)$ thì $uv \in L^p(\Omega)$ và

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx = \|u\|^p \|v\|^{p'}$$

Trong đó $p' = \dfrac{p}{p-1}$, tức là $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, p' được gọi là số mũ liên hợp đối với p

1.1.2.2. Định lý. (Định lý Minkowski).

Nếu $1 \le p < \infty$ thì

$$\|f + g\|^p \le \|f\|^p + \|g\|^p$$

1.1.2.3. Định lý.

Không gian $L^p(\Omega)$ với $1 \le p < \infty$ là một không gian Banach.

1.1.3. Không gian $W^{1,p}(\Omega)$

1.1.3.1. Định nghĩa.

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Hàm $u(x)$ được gọi là khả tích địa phương trong Ω nếu $u(x)$ là một hàm trong Ω và với mỗi $x_0 \in \Omega$ đều tồn tại một lân cận w của x_0 để $u(x)$ khả tích trong Ω.

1.1.3.2. Định nghĩa.

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử $u(x), v(x)$ là hai hàm khả tích địa phương trong Ω sao cho ta có hệ thức:

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} dx = (-1)^k \int_\Omega v\varphi \, dx$$

đối với mọi $\varphi(x) \in C_0^k(\Omega), k = k_1 + \ldots + k_n, k_i \le 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Khi đó, $v(x)$ được gọi là đạo hàm suy rộng cấp k của $u(x)$.

Kí hiệu:

$$v(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

1.1.3.3. Định nghĩa

Giả sử p là một số thực, $1 \le p < \infty$, Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Không gian Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ được định nghĩa như sau:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \mid u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}$$

Trong đó các đạo hàm trên là các đạo hàm suy rộng.

Với $p = 2$, ta kí hiệu $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$, nghĩa là:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \mid u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

1.1.3.4. Bổ đề

i) Không gian $W^{1,p}(\Omega)$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

trong đó $1 \le p < \infty$, dạng chuẩn này tương đương với dạng sau:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

trong đó $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ và $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{1}^{n} \left\| \frac{du}{dx_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$

ii) Không gian $H^1(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng: