ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ HẰNG

THUẬT TOÁN LẶP XEN KẼ MFS ĐỐI VỚI BÀI TOÁN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÔNG ĐẦY ĐỦ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ HẰNG

THUẬT TOÁN LẶP XEN KẼ MFS ĐỐI VỚI BÀI TOÁN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÔNG ĐẦY ĐỦ

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. VŨ VINH QUANG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

LỜI CẢM ƠN

Sau một thời gian nghiên cứu và thực hiện luận văn thạc sỹ chuyên nghành toán ứng dụng, đến nay luận văn của tôi đã được hoàn thành.Để có được kết quả như mong muốn, trước hết tôi xin gửi lời biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới thầy giáo hướng dẫn TS. Vũ Vinh Quang. Mặc dù rất bận rộn trong công việc nhưng thầy vẫn dành rất nhiều thời gian và tâm huyết trong việc hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn. Cho đến hôm nay, luận văn thạc sĩ của tôi đã được hoàn thành cũng chính là nhờ sự nhắc nhở, động viên thường xuyên và tận tâm chỉ bảo nghiêm túc về chuyên môn của thầy. Tôi cũng xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn đối với gia đình, bạn bè và người thân đã không ngừng động viên, khuyến khích và tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 9 năm 2014

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Xuất phát từ mô hình toán học của bài toán biên với hệ điều kiện biên dạng không chính quy, cơ sở toán học của phương pháp lặp xen kẽ MFS cùng phương pháp xây dựng nghiệm xấp xỉ thông qua hệ nghiệm cơ bản đối với bài toán biên thuần nhất. Luận văn đã hiện thực hóa các sơ đồ lặp xen kẽ để xác định nghiệm số của bài toán không chính quy bằng hai phương pháp xác định giá trị hàm hoặc đạo hàm trên phần biên chưa xác định điều kiện biên. Các kết quả số đã được xác định và từ đó đã đánh giá được hiệu quả của từng phương pháp. Trong trường hợp khi bài toán là phức tạp mà nếu sử dụng thuật toán lặp xen kẽ sẽ gặp phải bài toán biên hỗn hợp mạnh, dựa trên kết quả của thuật toán chia miền đối với bài toán biên elliptic với điều kiện biên gián đoạn mạnh, luận văn đã đưa ra sơ đồ lặp xác định nghiệm xấp xỉ của bài toán biên không chính quy, tiến hành lập trình xác định nghiệm số của bài toán, đánh giá về tốc độ hội tụ và độ chính xác của sơ đồ lặp, so sánh các phương pháp xác định hàm và đạo hàm.

Mục đích chính của luận văn là đề cập đến thuật toán lặp xen kẽ MFS đối với bài toán biên cho phương trình elliptic với điều kiện biên không đầy đủ. Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Sobolev và phương trình elliptic, các kiến thức về sơ đồ lặp, phương pháp sai phân đối với việc giải số phương trình đạo hàm riêng, thuật toán chia miền đối với bài toán biên hỗn hợp mạnh.

Chương 2: Trình bày mô hình vật lý và cơ học của bài toán biên elliptic với hệ điều kiện biên không chính quy

Chương 3: Nghiên cứu một số kết quả giải số bài toán biên không chính quy, luận văn sẽ đưa ra một số mô hình bài toán trong trường hợp tổng quát hơn đồng thời đề xuất một số sơ đồ lặp tìm nghiệm số của các bài toán tương ứng. Các kết quả số sẽ được kiểm tra bằng các chương trình viết bằng ngôn ngữ Matlab chạy trên máy tính PC.

Mặc dù đã rất cố gắng song nội dung của luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự chỉ bảo, đóng góp của các thầy cô giáo và các anh chị em bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy giáo hướng dẫn TS. Vũ Vinh Quang đã tận tình hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian Sobolev và phương trình elliptic

1.1.1. Không gian Sobolev.

1.1.1.1. Không gian $C^k(\overline{\Omega})$.

Giả sử Ω là một miền bị chặn trong không gian Euclide n chiều $\mathbb{R}^n$ và $\overline{\Omega}$ là bao đóng của Ω. Ta kí hiệu $C^k(\overline{\Omega}), (k = 0,1,2\ldots)$ là tập các hàm có đạo hàm đến cấp k kể cả k trong Ω, liên tục trong $\overline{\Omega}$.

Ta đưa vào $C^k(\overline{\Omega})$ chuẩn:

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|=k} \max_{x\in\overline{\Omega}} \left|D^\alpha u(x)\right| \tag{1.1}$$

trong đó $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ được gọi là vectơ với các tọa độ nguyên không âm, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Sự hội tụ theo chuẩn đã cho là sự hội tụ đều trong $\overline{\Omega}$ của các hàm và tất cả đạo hàm của chúng đến cấp k, kể cả k. Tập $C^k(\overline{\Omega})$ với chuẩn (1.1) là không gian Banach.

1.1.1.2. Không gian $L^p(\Omega)$

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và p là một số thực dương. Ta kí hiệu $L^p(\Omega)$ là lớp các hàm đo được f xác định trên Ω sao cho:

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$$

Trong $L^p(\Omega)$ ta đồng nhất các hàm bằng nhau hầu khắp trên Ω. Như vậy các phần tử của $L^p(\Omega)$ là các lớp tương đương các hàm đo được thỏa mãn (1.2) và hai hàm tương đương nếu chúng bằng nhau hầu khắp trên Ω. Vì :

$$|f(x)+g(x)|^p \le \left(|f(x)|+|g(x)|\right)^p \le 2^p\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right)$$

nên rõ ràng $L^p(\Omega)$ là một không gian vectơ.

Ta đưa vào $L^p(\Omega)$ phiếm hàm $\|\ .\ \|_p$ được xác định bởi:

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Định lý 1.1.1 (bất đẳng thức Hoder). Nếu $1 < p < \infty$ và $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^p(\Omega)$ thì $uv \in L^p(\Omega)$ và

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \le \|u(x)\|_p . \|v(x)\|_{p'}$$

Trong đó $p' = \dfrac{p}{p-1}$, tức là $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, p' được gọi là số mũ liên hợp đối với p

Định lý 1.1.2. (Bất đẳng thức Minkowski). Nếu $1 < p < \infty$ thì

$$\| f + g \|_p \le \| f \|_p + \| g \|_p$$

Định lý 1.1.3. Không gian $L^p(\Omega)$ với $1 \le p < \infty$ là một không gian Banach.

1.1.1.3. Không gian $W^{1,p}(\Omega)$

Định nghĩa 1.1.1 Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Hàm $u(x)$ được gọi là khả tích địa phương trong Ω nếu $u(x)$ là một hàm trong Ω và với mỗi $x_0 \in \Omega$ đều tồn tại một lân cận ω của x_0 để $u(x)$ khả tích trong Ω.

Định nghĩa 1.1.2 Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử $u(x), v(x)$ là hai hàm khả tích địa phương trong Ω sao cho ta có hệ thức:

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} dx = (-1)^k \int_\Omega v\varphi \, dx$$

đối với mọi $\varphi(x) \in C_0^k(\Omega), k = k_1 + \ldots + k_n, k_i \ge 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Khi đó, $v(x)$ được gọi là đạo hàm suy rộng cấp k của $u(x)$.

Kí hiệu: $v(x) = \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$

Định nghĩa 1.1.3 Giả sử p là một số thực, $1 \le p < \infty$, Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Không gian Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ được định nghĩa như sau:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \mid u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \ldots, n \right\}$$