ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ XUÂN TUẤN

VÀNH VÀ MÔĐUN PHÂN BẬC
ĐỊNH LÝ ARTIN - REES

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ XUÂN TUẤN

VÀNH VÀ MÔĐUN PHÂN BẬC
ĐỊNH LÝ ARTIN - REES

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SÔ
Mã số: 60.46.05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường

THÁI NGUYÊN – 2014

Mục lục

Lời mở đầu **1**

1 Vành và môđun Noether, Artin **3**

1.1 Vành và môđun Noether 3

1.2 Định lý cơ sở Hilbert 5

1.3 Môđun Artin 10

2 Vành và môđun phân bậc - Định lý Artin-Rees **13**

2.1 Vành và môđun phân bậc 13

2.2 Vành phân bậc liên kết và vành Rees 16

2.3 Định lý Artin-Rees và các hệ quả 19

3 Đa thức Hilbert **24**

3.1 Độ dài của môđun 24

3.2 Đa thức Hilbert 27

3.3 Đa thức Hilbert-Samuel 32

Kết luận **43**

Tài li

Tài liệu tham khảo **44**

Lời mở đầu

Cho R là giao hoán, M là R-môđun, I là một iđêan của R. Mục đích của luận văn là nghiên cứu về vành và môđun phân bậc, Định lý Artin-Rees. Đặc biệt, tôi xem xét trong trường hợp vành R là vành Noether. Các nội dung được trình bày trong luận văn dựa trên cuốn bài giảng của GS.TSKH Nguyễn Tự Cường và các cuốn tài liệu tham khảo chính : Introduction to commutative (M.F. Atiyah and I.G. Macdonal), Step in commutative algebra (R.Y. Sharp), Commutative algebra , Commutative ring theory (H. Matsumura).

Với mục đích tìm hiểu về vành và môđun phân bậc, Định lý Artin-Rees và các hệ quả của nó. Tôi đã lựa chọn đề tài **" Vành và môđun phân bậc, định lý Artin-Rees"** làm luận văn tốt nghiệp thạc sỹ.

Luận văn gồm 3 chương. Trong chương 1, tôi trình bày về các kiến thức cơ sở như định nghĩa và các tính chất về vành và môđun Noether, Artin; đặc biệt, trong chương này là Định lý cơ sở Hilbert và các hệ quả của nó. Đây là những công cụ quan trọng nhất cho những nghiên cứu được trình bày trong luận văn.

Chương 2 là chương chính của luận văn. Trong chương này, tôi nghiên cứu về vành và môđun phân bậc bao gồm: định nghĩa và tính chất vành môđun phân bậc; vành phân bậc liên kết và vành Rees; định nghĩa và các tính chất về lọc môđun; Định lý Artin-Rees và các hệ quả.

Chương 3 là chương trình bày về đa thức Hilbert bao gồm: độ dài của môđun, Định lý đa thức Hilbert và Đa thức Hilbert-Samuel.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của

GS.TSKH Nguyễn Tự Cường. Em xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành tới Thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn. Tiếp theo em xin chân thành cảm ơn tới các thầy cô giáo trường Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên em vượt qua những khó khăn trong học tập.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, người thân, bạn bè đã giúp đỡ tôi cả về vật chất lẫn tinh thần để tôi có thể hoàn thành luận văn và khóa học của mình.

Thái Nguyên, ngày 1 tháng 4 năm 2014

Tác giả luận văn

Lê Xuân Tuấn

Xác nhận của khoa

Xác nhận của giáo viên hướng dẫn

Chương 1

Vành và môđun Noether, Artin

Trong toàn bộ luận văn này ta luôn xét vành là giao hoán có đơn vị.

1.1 Vành và môđun Noether

Trước hết ta chứng minh định lý.

Định lý 1.1.1. *Cho M là một $R-$môđun. Khi đó các điều kiện sau tương đương:*

(i) Mọi tập khác rỗng các môđun con của M đều có một phần tử cực đại.

(ii) Mọi môđun con của M đều là hữu hạn sinh.

(iii) Mọi dãy tăng các môđun con của M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

đều dừng, nghĩa là tồn tại m để $M_k = M_m, \forall k \geq m$.

Chứng minh. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Ta cần chứng minh rằng mỗi $R-$môđun con N tùy ý của M là hữu hạn sinh. Thật vậy, giả sử N là vô hạn sinh. Xét $\sum$

là tập hợp tất cả các $R-$môđun con hữu hạn sinh của N. Vì $0 \in \sum$ nên $\sum \neq \varnothing$. Theo giả thiết, tồn tại trong $\sum$ một phần tử cực đại N'. Vì N' hữu hạn sinh, nên tồn tại $x \in N \backslash N'$. Từ đây suy ra $R-$môđun con hữu hạn sinh $N' + xR \in \sum$, điều này trái với tính cực đại của N' trong $\sum$ vì $N' \subset N' + xR$. Vậy N là hữu hạn sinh.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Giả sử $M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$ là một xích tăng tùy ý các $R-$môđun con của M (*). Đặt $N = \cup_{i=1}^{\infty} M_i$. Khi đó, N là môđun con của M suy ra N hữu hạn sinh, sinh bởi các phần tử $x_1, ..., x_k, x_i \in N, \forall i = 1, ..., k$. Suy ra tồn tại n_0 sao cho $x_1, ..., x_k \in M_{n_0}$, do đó $N \subseteq M_{n_0}$ và $M_t = M_{n_0}, \forall t \geq n_0$, từ đó suy ra (*) dừng.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, tức là tồn tại một tập hợp $\sum \neq \varnothing$ gồm các môđun con của M mà trong $\sum$ không có phần tử cực đại. Chọn $M_1 \in \sum$ một phần tử tùy ý, vì $\sum$ không có phần tử cực đại nào nên tồn tại $M_2 \in \sum$ và $M_1 \subset M_2$. Tiếp tục quá trình này với chú ý rằng trong $\sum$ không có phần tử cực đại ta chọn được một xích tăng không dừng các môđun con của M

$$M_1 \subset M_2 \subset ... \subset M_n \subset ...$$

điều này trái với giả thiết. Vậy mọi tập khác rỗng các môđun con của M đều có phần tử cực đại. $\square$

Định nghĩa 1.1.2. Một $R-$môđun M được gọi là *môđun Noether* nếu thỏa mãn một trong các điều kiện tương đương trong Định lý 1.1.1. Vành R là một *vành Noether* nếu nó là một $R-$môđun Noether.

Từ định nghĩa trên ta có các nhận xét sau.

Nhận xét 1.1.3. Một tập con khác rỗng của R là một $R-$môđun con của $R-$môđun R nếu và chỉ nếu nó là một iđêan của R, nên R là một vành Noether khi và chỉ khi R thỏa mãn một trong ba điều kiện tương đương sau đây.

(i) Mọi tập hợp khác rỗng các iđêan của R đều có phần tử cực đại.

(ii) Mọi dãy tăng các iđêan của R

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_n ....$$

đều dừng, nghĩa là $\exists m$ để $I_k = I_m, \forall k \geq m$.

(iii) Mọi iđêan của R đều hữu hạn sinh.

Ví dụ 1.1.4. (a) Vành các số nguyên Z là vành Noether vì mọi iđêan của nó đều là iđêan chính nên nó hữu hạn sinh.
Tổng quát, mọi vành chính đều là vành Noether.

(b) Một trường là vành Noether.

(c) Một không gian vectơ là một môđun Noether nếu và chỉ nếu nó hữu hạn chiều.

(d) Vành đa thức vô hạn biến trên vành giao hoán R khác không không phải vành Noether, vì $R[x_1, x_2, ...]$ có dãy tăng thực sự vô hạn các iđêan của $R[x_1, x_2, ...]$ là

$$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset ... \subset (x_1, x_2, ..., x_n) \subset ....$$

1.2 Định lý cơ sở Hilbert

Trước hết ta chứng minh định lý.

Định lý 1.2.1. *Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và một dãy khớp ngắn các $R-$môđun*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Khi đó M là môđun Noether nếu và chỉ nếu M' và M'' là các môđun Noether.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết thêm rằng M' là một $R-$môđun con của M và $M'' = M/M'$.

Giả sử M là môđun Noether. Vì mọi xích tăng các môđun con của M' cũng là xích tăng trong M nên M' là Noether.
Cho

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq ... \subseteq N_n \subseteq ...$$

là một dãy tăng các môđun con của M''. Khi đó tồn tại dãy tăng các môđun con

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

của M sao cho $N_n = M_n/M', \forall n$. Suy ra tồn tại số tự nhiên k để $M_n = M_k, \forall n \geq k$, tức là $N_n = N_k, \forall n \geq k$ và do đó M'' là Noether.

Ngược lại, cho

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

là một xích tăng tùy ý các môđun con của M, khi đó ta nhận được xích tăng các môđun con sau

$$M_1 \cap M' \subseteq M_2 \cap M' \subseteq ... \subseteq M_n \cap M' \subseteq ...$$

của M' và

$$(M_1 + M')/M' \subseteq (M_2 + M')/M' \subseteq ... \subseteq (M_n + M')/M' \subseteq ...$$