ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

LÝ VĂN ĐỨC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA LOGARIT VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

LÝ VĂN ĐỨC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA LOGARIT VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên nghành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Mở đầu

Phương trình, bất phương trình là một trong những nội dung cơ bản và quan trọng của chương trình toán bậc trung học phổ thông.

Đặc biệt là các phương trình, bất phương trình chứa logarit là những nội dung hay và khó đối với học sinh và chúng thường xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng và đề thi học sinh giỏi. Việc giảng dạy hàm số logarit đã được đưa vào chương trình lớp 12 trong đó phần kiến thức về phương trình, bất phương trình chứa logarit chiếm vai trò trọng tâm.

Tuy nhiên do thời gian hạn hẹp của chương trình phổ thông nên trong sách giáo khoa không nêu được đầy đủ và chi tiết tất cả các dạng bài toán về phương trình, bất phương trình chứa logarit và các bài toán liên quan. Vì vậy học sinh thường gặp nhiều khó khăn khi giải các bài toán nâng cao về phương trình, bất phương trình chứa logarit trong các đề thi đại học, cao đẳng và đề thi học sinh giỏi. Mặc dù đã có nhiều tài liệu tham khảo về logarit với nội dung khác nhau nhưng chưa có chuyên đề riêng khảo sát về phương trình, bất phương trình chứa logarit một cách hệ thống.

Đặc biệt, nhiều dạng toán về đại số và logarit có quan hệ chặt chẽ với nhau, không thể tách rời được. Nhiều bài toán chứa logarit cần có sự trợ giúp của đại số, giải tích và ngược lại.

Do đó, để đáp ứng nhu cầu về giảng dạy, học tập và góp phần nhỏ bé vào sự nghiệp giáo dục, luận văn "Phương pháp giải phương trình, bất phương trình chứa logarit và các bài toán liên quan" nhằm hệ thống các kiến thức cơ bản về phương trình, bất phương trình chứa logarit kết hợp với kiến thức đại số, giải tích để tổng hợp, chọn lọc và phân loại các phương pháp giải phương trình, bất phương trình chứa logarit và xây dựng một số lớp bài toán mới.

Luận văn được chia làm 3 chương

Chương 1. Tính chất của hàm số logarit và các kiến thức liên quan.

- Nhắc lại các tính chất của hàm số logarit.
- Nêu các định lý bổ trợ.
- Lớp hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính.

Chương 2. Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình chứa logarit.

- Trình bày các phương pháp giải phương trình chứa logarit.
- Trình bày các phương pháp giải bất phương trình chứa logarit.
- Trình bày các phương pháp giải một số hệ chứa logarit.

Chương 3. Các bài toán liên quan đến hàm số logarit.

- Nêu phương trình và bất phương trình hàm trong lớp hàm logarit.
- Nêu các bài toán về dãy số và giới hạn dãy số sinh bởi hàm logarit.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với Giáo sư, Tiến sĩ khoa học Nguyễn Văn Mậu, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn, cung cấp tài liệu và truyền đạt những kinh nghiệm nghiên cứu cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo trong khoa Toán - Tin, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Trường THPT Na Rì và bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ tạo điều kiện cho tôi hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên 2014

Lý Văn Đức

Chương 1

Tính chất của hàm số logarit và các kiến thức liên quan

1.1 Tính chất của hàm số logarit

Hàm số $f(x) = \log_a x, 0 < a \neq 1$ được gọi là hàm số logarit cơ số a.
Nhận xét rằng tập xác định $D = (0; +\infty)$ và tập giá trị $I = \mathbb{R}$.
Trong các phần tiếp theo, ta giả sử $0 < a \neq 1$.
Nhận xét rằng hàm số $f(x) = \log_a x$ liên tục và có đạo hàm với mọi $x > 0$, hơn nữa

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

Ta khảo sát tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \log_a x$ trong 2 trường hợp.
- Trường hợp 1: $a > 1$.
Khi đó, $\ln a > 0$ nên suy ra

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0, \forall x > 0.$$

Vậy, khi $a > 1$ thì $f(x) = \log_a x$ là hàm đồng biến trên D.
Ta lại có $f(1) = 0, f(a) = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.
Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	1	a	$+\infty$
$y = \log_a x$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

- Trường hợp 2: $0 < a < 1$.

Trong trường hợp này $f'(x) < 0, \forall x \in D$.

Vậy, khi $0 < a < 1$ thì $f(x) = \log_a x$ là hàm số nghịch biến trên D.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	1	a	$+\infty$
$y = \log_a x$	$+\infty$	0	1	$-\infty$

Tính chất 1.1. $f(x) = \log_a x$ là hàm đồng biến trên $D = \mathbb{R}^+$ khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Tính chất 1.2. Với mọi $a > 0$, $a \neq 1$ và $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$, ta có

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \ \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Tính chất 1.3. Với mọi $a > 0$, $a \neq 1$ và $x > 0$. Với α bất kỳ, ta có

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

Tính chất 1.4. Với mọi $0 < a \neq 1, 0 < c \neq 1$ và $x > 0$, ta có

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c x}.$$

Tính chất 1.5. Hàm số $f(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên khoảng $J \in \mathbb{R}$ thì hàm số $y = \log_a u(x)$, $(0 < a \neq 1)$ có đạo hàm trên J và $(\log_a u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.

Tính chất 1.6. Với mọi $a > 0$, $a \neq 1$ và $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$, ta có

- Khi $a > 1$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
- Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

1.2 Các định lý bổ trợ

Định lí 1.1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Định lí 1.2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $f(a) = A, f(b) = B$ thì hàm số nhận mọi giá trị trung gian giữa A và B.

Hệ quả 1.1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì nó nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Định lí 1.3 (Rolle)**.** Cho hàm số $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn f liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh.
Vì $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên theo định lí Weierstrass $f(x)$ nhận giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên $[a; b]$.
- Khi $M = m$ ta có $f(x)$ là hàm hằng trên $[a; b]$, do đó với mọi $c \in (a; b)$ luôn có $f'(c) = 0$.
- Khi $M > m$, vì $f(a) = f(b)$ nên tồn tại c $\in$ (a; b) sao cho $f(c) = m$ hoặc $f(c) = M$, theo bổ đề Fermat suy ra $f'(c) = 0$.

Hệ quả 1.2. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $f(x)$ có n nghiệm (n là số nguyên dương lớn hơn 1) trên $(a; b)$ thì $f'(x)$ có ít nhất $n - 1$ nghiệm trên $(a; b)$.

Hệ quả 1.3. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $f'(x)$ vô nghiệm trên $(a; b)$ thì $f(x)$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên $(a; b)$.

Hệ quả 1.4. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $f'(x)$ có nhiều nhất n nghiệm (n là số nguyên dương) trên $(a; b)$ thì $f(x)$ có nhiều nhất $n + 1$ nghiệm trên $(a; b)$.

Định lí 1.4 (Lagrange)**.** Cho hàm số $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn f liên tục trên đoạn $[a; b]$, khả vi trên khoảng $(a; b)$, khi đó $\exists c \in (a; b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Chứng minh.
Xét hàm số
$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$
Ta có
$F(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $F(a) = F(b)$.
Theo định lí Rolle tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $F'(c) = 0$.
Mà $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, suy ra $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Hệ quả 1.5. Nếu $F'(x) = 0$ với mọi x thuộc khoảng $(a; b)$ thì $F(x)$ bằng hằng số trên khoảng đó.

Định lí 1.5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

Định lí 1.6 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)**.** Cho hai cặp dãy số bất kỳ $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\exists k$ để $a_i = kb_i, \forall i \in (1, 2, ..., n)$.
Chứng minh. Xét tam thức bậc hai
$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$
- Nếu $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- Nếu $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 0$, ta viết $f(x)$ dưới dạng
$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + ... + (a_nx - b_n)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì
$$\Delta' = (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$