ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ LÝ

MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MÔ ĐUN COHEN-MACAULAY VỚI CHIỀU >S

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **TS.NGUYỄN THỊ DUNG**

Thái Nguyên, năm 2014

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là hoàn toàn trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn đã được sự đồng ý của cá nhân và tổ chức. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2014

Học viên

Phạm Thị Lý

Xác nhận
của trưởng khoa chuyên môn

Xác nhận
của người hướng dẫn khoa học

TS. Nguyễn Thị Dung

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình cặn kẽ của TS. Nguyễn Thị Dung, Cô đã dành nhiều thời gian và công sức giúp tôi hoàn thành luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới cô hướng dẫn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Sư phạm, Đại học Khoa học thuộc Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn bạn bè người thân và đồng nghiệp đã động viên và tạo điều kiện cho tôi để tôi có thể hoàn thành khóa học của mình.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2014

Học viên

Phạm Thị Lý

Mục lục

Trang

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán, địa phương Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$.

Ta đã biết rằng lớp môđun Cohen-Macaulay đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết các vành Noether và môđun hữu hạn sinh. Nhắc lại rằng môđun M được gọi là *Cohen-Macaulay* nếu mọi hệ tham số là M-dãy chính quy. Cấu trúc của lớp môđun Cohen-Macaulay đã được biết rõ thông qua lý thuyết bội, môđun đối đồng điều địa phương, đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic, địa phương hóa, ...(xem [BH], [Mat]). Đã có một số mở rộng của các khái niệm M-dãy chính quy và môđun Cohen-Macaulay, trong số đó là các khái niệm M-dãy với chiều $> s$ được giới thiệu bởi Brodmann-Nhan [BN] và môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$ được định nghĩa bởi N. Zamani [Z].

Định nghĩa. Cho $s \geqslant -1$ là một số nguyên. Một dãy các phần tử $(x_1, \ldots, x_n)$ trong $\mathfrak{m}$ được gọi là *M-dãy với chiều $> s$* nếu $x_i \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M)$ thỏa mãn $\dim(R/\mathfrak{p}) > s$, với mọi $i = 1, \ldots, n$. Ta nói rằng M là môđun *Cohen-Macaulay với chiều $> s$* nếu mọi hệ tham số của M là M-dãy với chiều $> s$.

Rõ ràng rằng một M-dãy với chiều $> s$ với $s = -1, 0, 1$ tương ứng là một M-dãy, f-dãy ứng với M theo nghĩa của Cường-Schenzel-Trung [CST], và dãy chính quy suy rộng ứng với M theo nghĩa của L. T. Nhàn [Nh]. Vì thế các lớp môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$ trong các trường hợp $s = -1, 0, 1$ tương ứng là môđun Cohen-Macaulay, f-môđun định nghĩa bởi [CST] và f-môđun suy rộng được giới thiệu bởi Nhàn-Morales [NM]. Hơn nữa các nghiên cứu gần đây vẫn cho thấy rằng lớp môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$, với $s > 1$ là một số nguyên tùy ý vẫn còn nhiều tính chất tương tự như các lớp môđun quen biết trên. Thật vậy, năm 2009, N. Zamani [Z] đã chứng minh một số đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$ thông qua đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic, địa phương hóa, tính catenary, tính đẳng chiều đến các thành phần nguyên tố với chiều $> s$ của tập giá của M. Ngoài ra, một số kết quả liên quan tới tính hữu hạn của tập iđêan nguyên tố gắn kết của môđun đối đồng điều địa phương như là sự mở rộng các kết quả trước đây của Hellus [H] và Nhàn-Morales [NM] cũng đã được đưa ra trong [Z].

Tiếp tục nghiên cứu của N. Zamani, một vấn đề được đặt ra là: *Liệu rằng môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$ có các đặc trưng qua số bội, kiểu đa thức và chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương hay không?* Câu hỏi này đã được trả lời trong một nghiên cứu gần đây của N. T. Dung [D].

Mục đích của luận văn là đọc và trình bày lại các kết quả của bài báo "Some characterizations of Cohen-Macaulay modules in dimension $>$ s" của [D] được đăng trên tạp chí Bulletin of the Korean Mathematical Society năm 2014.

Luận văn được chia thành hai chương. Chương 1 bao gồm các kiến thức chuẩn bị: hệ tham số và số bội, kiểu đa thức, biểu diễn thứ cấp và chiều Noether, môđun đối đồng điều địa phương. Mục 1 của Chương 2 dành để nhắc lại các kết quả về lớp môđun Cohen-Macaulay và một số mở rộng, trong đó giới thiệu về lớp môđun với chiều $>$ s và một số đặc trưng của lớp môđun này thông qua đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic, địa phương hóa, tính catenary, tính đẳng chiều đến các thành phần nguyên tố với chiều $> s$ của tập giá của M. Các đặc trưng này đã được chứng minh trong [Z] và đã được trình bày lại trong luận văn thạc sĩ của Dương Thị Giang [G]. Mục 2 của Chương 2 là nội dung chính của luận văn, dành để chứng minh một số đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$ thông qua số bội $e(\underline{x}; M)$ của M, chiều Noether $\text{N-dim}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ của các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, và kiểu đa thức $p(M)$ của M được giới thiệu bởi [C].

Phần kết luận của luận văn tổng kết các kết quả đã đạt được.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong toàn bộ chương này, ta luôn ký hiệu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, Noether, A là R-môđun Artin và M là R-môđun. Chương này dành để nhắc lại một số kiến thức được dùng trong chương tiếp theo: biểu diễn thứ cấp, chiều Noether, số bội, kiểu đa thức,...

1.1 Hệ tham số và số bội

Mục này dành để nhắc lại một số kiến thức về hàm Hilbert, hệ tham số và số bội. Các kết quả này được dùng trong chương sau và có thể được xem trong [Mat], [BH].

Nhắc lại rằng một iđêan I của $(R, \mathfrak{m})$ được gọi là *iđêan định nghĩa* của R nếu tồn tại $n > 0$ sao cho $\mathfrak{m}^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$. Khi đó $\sqrt{\mathfrak{m}^n} \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\mathfrak{m}}$ hay $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ nên ta có I là $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Vậy I là iđêan định nghĩa nếu và chỉ nếu I là $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Tương tự iđêan $I \subset \mathfrak{m}$ được gọi là *iđêan định nghĩa* của R-môđun M nếu tồn tại $n > 0$ sao cho $\mathfrak{m}^n M \subseteq IM$.

Cho I là iđêan định nghĩa của R và M là R- môđun hữu hạn sinh. Giả sử $\{a_1, \ldots, a_r\}$ là hệ sinh của I. Ta có $\dim(R/I) = 0$ nên R/I là vành Artin, tức là $\ell_R(R/I) < \infty$. Do vậy $\ell_R(I^k M/I^{k+1}M) < \infty$. Theo Định lý đa thức Hilbert, với k đủ lớn, tồn tại đa thức với hệ số hữu tỉ $P'_{M,I}(k)$ sao cho

$P'_{M,I}(k) = \ell_R(I^k M/I^{k+1}M)$. Đặt

$$P_{M,I}(n) = \sum_{k=0}^{n} P'_{M,I}(k) = \sum_{k=0}^{n} \ell_R(I^k M/I^{k+1}M) = \ell_R(M/I^{n+1}M).$$

Khi đó với n đủ lớn, $P_{M,I}(n)$ là một đa thức và được gọi là *đa thức Hilbert-Samuel* của M đối với I. Người ta đã chứng minh rằng bậc của đa thức $P_{M,I}(n)$ không phụ thuộc vào cách chọn iđêan định nghĩa I. Hơn nữa, nếu chiều Krull $\dim M = d$ thì luôn tồn tại các phần tử $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ sao cho

$$\ell_R(M/(x_1, \ldots, x_d)M) < \infty.$$

Khi đó ta có kết quả sau.

Định lý 1.1.1. *Với các giả thiết như trên, ta có*

$$\dim M = \deg(P_{M,I}(n)) = \min\{t \mid \exists x_1, ..., x_t \in \mathfrak{m} : \ell_R(M/(x_1, ..., x_t)M) < \infty\}.$$

Từ định lý trên ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.1.2. (i) Một hệ $\underline{x} := x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ được gọi là *một hệ tham số* của M nếu $\ell(M/(\underline{x}))M) < \infty$.

(ii) Nếu $\underline{x} \in \mathfrak{m}$ là một hệ tham số của M thì các phần tử $x_1, \ldots, x_i$ được gọi là *một phần hệ tham số*, với mọi $i = 1, \ldots, d$.

Chú ý 1.1.3. (i) Hệ tham số luôn tồn tại.

(ii) Nếu $\underline{x}$ là một hệ tham số của M thì $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)$ gọi là *iđêan tham số* của M, hơn nữa, $\mathfrak{q} + \operatorname{Ann}_R M$ là một iđêan định nghĩa của R, tức là $\ell_R(\mathfrak{q} + \operatorname{Ann}_R M) < \infty$.

Mệnh đề sau đây cho ta một số tính chất cơ bản của hệ tham số, (xem [Mat, Định lý 14.1, Định lý 14.2]).

Mệnh đề 1.1.4. *(i) Nếu $\underline{x}$ là một hệ tham số của M và $\underline{n} = n_1, \ldots, n_d$ là một bộ gồm d số nguyên dương thì $\underline{x}(\underline{n}) = x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}$ cũng là hệ tham số của M.*

(ii) Cho $x_1, \dots, x_t$ là một dãy các phần tử của $\mathfrak{m}$, với $t \leqslant d$. Khi đó,

$$\dim(M/(x_1, \dots, x_t)M) \geqslant \dim M - t.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1, \dots, x_t$ là một phần hệ tham số của M.

(iii) Hệ $\underline{x} \in \mathfrak{m}$ là một hệ tham số của M khi và chỉ khi $x_i \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ thỏa mãn $\dim R/\mathfrak{p} = d - i + 1$, với mọi $i = 1, \dots, d$. Đặc biệt, một phần tử $x \in \mathfrak{m}$ là phần tử tham số của M khi và chỉ khi $x \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ sao cho $\dim R/\mathfrak{p} = d$.

(iv) Nếu $\underline{x}$ là một hệ tham số của M thì $\underline{x}$ cũng là hệ tham số của $\widehat{M}$, trong đó $\widehat{M}$ là tôpô đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của M.

Định nghĩa 1.1.5. Cho I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R, và chiều Krull $\dim M = d$. Theo Định lý 1.1.1, ta có $\ell_R(M/I^{n+1}M) = P_{M,I}(n)$ là đa thức với n đủ lớn, trong đó $\deg P_{M,I}(n) = d$. Khi đó tồn tại các số nguyên $e_0, e_1, \dots, e_d, e_0 > 0$ sao cho

$$P_{M,I}(n) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \dots + (-1)^d e_d.$$

Các số $e_0, \dots, e_d$ gọi là hệ số Hilbert của M đối với I, kí hiệu là $e_i(I, M)$. Đặc biệt, số nguyên dương e_0 trong biểu diễn trên được gọi là *số bội* của M đối với I, kí hiệu là $e(I, M)$.

Chú ý rằng nếu I là iđêan định nghĩa của M thì luôn tồn tại hệ tham số $\underline{x} = x_1 \dots, x_d$ của M sao cho $(\underline{x})$ là iđêan rút gọn của I ứng với M (nghĩa là $(\underline{x})I^n M = I^{n+1}M$). Hơn nữa $e(I; M) = e(\underline{x}; M)$. Vì thế, việc tính toán số bội $e(I; M)$ của M ứng với iđêan định nghĩa I có thể được quy về trường hợp I là iđêan sinh bởi hệ tham số của M bởi vì khi đó có thể biểu diễn số bội thông qua đồng điều Koszul $H_\bullet$(x; M) (xem [BH]). Do đó, để tiện hơn trong việc tính toán trên số bội, ta nhắc lại khái niệm số bội hình thức được giới thiệu bởi Northcott. Vẫn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M là R-môđun hữu hạn sinh. Một hệ các phần tử $x_1, \ldots, x_t$ trong $\mathfrak{m}$ được gọi là *hệ bội* của M nếu $\ell(M/(x_1, \ldots, x_t)M) < \infty$, hay một cách tương đương, $(x_1, \ldots, x_t)$ là một iđêan định nghĩa của M. Cho $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ là một dãy khớp các R-môđun. Khi đó $x_1, \ldots, x_t$ là một hệ bội của M nếu và chỉ nếu $x_1, \ldots, x_t$ là hệ bội của M' và M''. Từ đó dễ chứng minh được rằng nếu $x_1, \ldots, x_t$ là hệ bội của M thì $x_2, \ldots, x_t$ là hệ bội của M/x_1M và $0 :_M x_1$. Vì thế ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.1.6. Cho $x_1, \ldots, x_t$ là hệ bội của M. Nếu $t = 0$, tức là $\ell(M) < \infty$ thì ta đặt $e(\emptyset; M) = \ell(M)$. Nếu $t > 0$, tức là $\ell(M/(x_1, \ldots, x_t)M) < \infty$ thì ta có

$$\ell((0 :_M x_1)/(x_2, \ldots, x_t)(0 :_M x_1)) < \infty,$$

tức là $(x_2, \ldots, x_t)$ là hệ bội của $0 :_M x_1$. Theo giả thiết quy nạp thì

$$e(x_2, \ldots, x_t; M/x_1M) \text{ và } e(x_2, \ldots, x_t; 0 :_M x_1)$$

là tồn tại. Khi đó

$$e(x_1, \ldots, x_t; M) = e(x_2, \ldots, x_t; M/x_1M) - e(x_2, \ldots, x_t; 0 :_M x_1)$$

được gọi là *số bội* của M ứng với hệ bội $(x_1, \ldots, x_t)$.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của số bội.

Mệnh đề 1.1.7. *(i)* $0 \leqslant e(x_1, \ldots, x_t; M) \leqslant \ell(M/(x_1, \ldots, x_t)M)$. *Đặc biệt, nếu tồn tại* i *sao cho* $x_i^n M = 0$, *với mọi* n *là số tự nhiên nào đó thì* $e(x_1, \ldots, x_t; M) = 0$.

(ii) Giả sử

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0$$