ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

MA VĨNH HUY

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN FREDHOLM LOẠI II

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Giáo viên hướng dẫn:

TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tác giả luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của TS. Nguyễn Văn Ngọc. Thầy đã dành nhiều thời gian chỉ bảo rất tận tình, hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy và kính chúc thầy luôn luôn mạnh khỏe.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và quý thầy cô tham gia giảng dạy lớp cao học khóa 6 (2012 - 2014) đã quan tâm, giúp đỡ và mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, các anh chị em học viên lớp cao học toán K6 và bạn bè đồng môn đã giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập tại Đại học Thái Nguyên và trong quá trình hoàn thiện luận văn cao học.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2014

Tác giả

Ma Vĩnh Huy

Mở đầu

Toán học là một môn học gắn liền với thực tiễn, bởi toán học bắt nguồn từ nhu cầu giải quyết các vấn đề có nguồn gốc từ thực tiễn. Cùng với thời gian, toán học ngày càng phát triển và được chia làm hai lĩnh vực: Toán học lý thuyết và toán học ứng dụng.

Trong lĩnh vực toán học ứng dụng, thường gặp rất nhiều bài toán dẫn đến những phương trình trong đó hàm chưa biết chứa dưới dấu tích phân. Những loại phương trình đó được gọi là phương trình tích phân. Đây được xem như là một công cụ toán học hữu ích có ứng dụng rộng rãi không chỉ trong toán học mà còn trong nhiều ngành như vật lí, cơ học và các ngành khoa học kĩ thuật khác ví dụ như nghiên cứu phương trình tích phân nhằm giải phương trình vi phân với các điều kiện biên xác định hay giải quyết một số vấn đề vật lí như hiện tượng khuếch tán, hiện tượng truyền, . . . Vì vậy việc nghiên cứu các phương trình tích phân đóng vai trò quan trọng trong toán học.

Hai loại phương trình tích phân rất quan trọng được nghiên cứu và phát triển vào những năm đầu của thế kỷ 20 là phương trình tích phân Fredholm loại II và phương trình tích phân Volterra. Luận văn này trình bày môt số vấn đề lý thuyết của phương trình tích phân Fredholm loại II. Với đề tài *"Phương trình tích phân Fredholm loại II"*, tác giả trình bày các khái niệm cơ bản về phương trình Fredholm, các định lý Fredholm, sự tồn tại nghiệm của phương trình phương trình tích phân Fredholm loại II trong trường hợp nhân suy biến, sử dụng phương pháp thay thế liên tiếp, xấp xỉ liên tiếp, xấp xỉ đều cho phương trình này.

Luận văn gồm có phần Mở đầu, Ba chương, Kết luận và Danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: *Phương trình tích phân với nhân suy biến* . Chương này trình bày các không gian hàm khả tổng cơ bản, các khái niệm cơ bản về phương trình Fredholm. Nội dung chính của chương này là trình bày cách giải phương trình Fredholm (loại II) với nhân suy biến (tách biến).

Chương 2: *Phương pháp xấp xỉ liên tiếp và xấp xỉ đều.* Mục đích của chương này là trình bày một số phương pháp giải các phương trình tích phân Fredholm loại II, là phương pháp thế liên tiếp, phương pháp xấp xỉ liên tiếp, phương pháp xấp xỉ đều và các ví dụ minh họa.

Chương 3: *Các định lý Fredholm.* Chương này là cơ sở lý thuyết quan trọng của phương trình Fredholm loại II. Trong chương này đã trình bày bốn định lý Fredholm tính tồn tại nghiệm, tính duy nhất nghiệm của các phương trình Fredholm loại II với nhân tổng quát.

Luận văn này chưa đề cập tới lớp phương trình tích phân Fredholm loại II đối với nhân Hermitian (nhân đối xứng). Nội dung của luận văn chủ yếu được hình thành từ các tài liệu [3] và [4].

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn trực tiếp của TS. Nguyễn Văn Ngọc. Mặc dù, tác giả đã hết sức cố gắng nhưng do thời gian có hạn và kinh nghiệm nghiên cứu còn hạn chế nên khó tránh khỏi thiếu sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2014

Tác giả

Ma Vĩnh Huy

Chương 1

Phương trình tích phân với nhân suy biến

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về không gian hàm, phương trình tích phân Fredholm.

1.1 Một số không gian hàm

Ký hiệu $C\,[a,b]$ là không gian các hàm liên tục trên khoảng hữu hạn $[a,b]$ với chuẩn

$$||f||_C = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$$

Ký hiệu $L^p(a,b)\,(0 < p < +\infty)$ là không gian các hàm khả tổng trên (a,b), sao cho

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f\,(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Các trường hợp riêng đặc biệt quan trọng là $p = 1$ và $p = 2$. $L^2(a,b)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có dạng

$$|(f,g)| \leqslant ||f||_2||g||_2.$$

hay, một cách cụ thể hơn

$$\left|\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b \left|\overline{g(x)}\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Một chuẩn khác được nhắc đến là chuẩn vô cùng được định nghĩa như sau

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Hoàn toàn tương tự, chuẩn có thể được định nghĩa theo tập hợp các hàm nhận giá trị phức liên tục được định nghĩa trên hình vuông $Q(a,b)$. Ký hiệu $L^2(Q(a,b))$ là không gian của các hàm hai biến $K(x,y), (x,y) \in Q(a,b)$, sao cho

$$\|K\|_2 = \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\, dxdt\right)^{1/2} < \infty,$$

và

$$\|K\|_\infty = \sup\{|K(x,t)| : (x,t) \in Q(a,b)\},$$

sẽ được quan tâm đặc biệt trong chương này.

Hội tụ đều của dãy hàm vô tận: Dãy vô hạn $\{f_n(x)\}$ của hàm *hội tụ đều* trên $[a,b]$ tới hàm $f(x)$ nếu: Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số nguyên $N = N(\varepsilon)$ sao cho $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in [a,b]$ và với mọi $n \ge N(\varepsilon)$.

Chuỗi vô hạn $\sum_1^\infty f_n(x)$ hội tụ đều trên $[a,b]$ nếu tổng của các dãy con hội tụ đều trên $[a,b]$.

Tiêu chuẩn Cauchy được dùng để thiết lập hội tụ đều. Chúng ta nói rằng dãy vô hạn $\{f_n(x)\}$ được định nghĩa hội tụ đều trên $[a,b]$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số nguyên $N(\varepsilon)$ sao cho $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in [a,b]$ và với mọi $n, m \ge N(\varepsilon)$.

Hội tụ đều là điều kiện cần trong nhiều định lý. Ví dụ, nếu $\{f_n(x)\}$ là một dãy vô hạn của hàm liên tục trên $[a,b]$ và nếu dãy $\{f_n(x)\}$ hội tụ đều đến hàm giới hạn $f(x)$ thì $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$.

Hội tụ đều cũng cần để chứng minh phép lấy tích phân. Nếu $\{f_n(x)\}$ là một dãy các hàm khả tích hội tụ đều đến $f(x)$ trên $[a,b]$, thì $f(x)$ khả tích và

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Như một hệ quả tức thời, ta có thể nói rằng nếu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

và hội tụ đều trên $[a,b]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

1.2 Khái niệm về phương trình Fredholm

Khái niệm 1.1. Kí hiệu (a,b) là khoảng hữu hạn hay vô hạn của trục thực. Giả sử $f(x)\,(a<x<b)$, $K(x,y)\,(a<x,y<b)$ là các hàm đã cho, $u(x)\,(a<x<b)$ là hàm cần tìm. Các phương trình sau đây được gọi là các phương trình tích phân đối với ẩn hàm $u(x)$:

$$\int_a^b K(x,y)\,u(y)\,dy = f(x)\,,\quad a<x<b, \tag{1.1}$$

$$u(x) - \int_a^b K(x,y)\,u(y)\,dy = f(x)\,,\quad a<x<b. \tag{1.2}$$

Phương trình (1.1) được gọi là phương trình tích phân loại 1, còn phương trình (1.2) được gọi là phương trình tích phân loại 2, hàm $f(x)$ được gọi là vế phải, hay số hạng tự do, còn hàm $K(x,y)$ được gọi là nhân hay hạch của phương trình. Nếu vế phải $f(x)\equiv 0$, thì phương trình được gọi là phương trình thuần nhất, còn nếu $f(x)\neq 0$, thì phương trình được gọi là phương trình không thuần nhất.

Thông thường người ta không chỉ xét một phương trình mà xét cho một họ các phương trình dạng

$$u(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\,u(y)\,dy = f(x)\,,\quad a<x<b, \tag{1.3}$$

trong đó λ (là số thực hay phức) được gọi là tham số của phương trình (1.3).

Phương trình Fredholm: Xét phương trình (1.2). Phương trình (1.2) được gọi là phương trình Fredholm nếu

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty, \quad \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 \, dxdy < \infty. \tag{1.4}$$

Nếu điều kiện thứ 2 trong (1.4) được thỏa mãn thì, theo định lí Fubini, tích phân

$$\int_a^b |K(x,y)|^2 \, dy,$$

tồn tại hầu khắp nơi với $x \in (a,b)$. Trong nhiều trường hợp chúng ta giả thiết thêm rằng: Tồn tại hằng số A sao cho

$$\int_a^b |K(x,y)|^2 \, dx \leq A, \quad a < x < b. \tag{1.5}$$

Nếu khoảng (a,b) hữu hạn, thì từ điều kiện (1.5) suy ra điều kiện thứ hai trong (1.4).

Nghiệm $u(x)$ của phương trình tích phân cũng được tìm trong lớp hàm bình phương khả tích

$$\int_a^b |u(x)|^2 \, dx < \infty.$$

1.3 Phương trình tích phân với nhân suy biến

Nhân suy biến của một phương trình tích phân là nhân có dạng

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} a_k(x) \, b_k(s). \tag{1.6}$$

Chúng ta sẽ giả thiết rằng, các hàm $a_k(x)$ và $b_k(s)$ là bình phương khả tích trên khoảng (a,b).

Đặt (1.6) vào phương trình

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \, u(s) \, ds = f(x), \quad a < x < b, \tag{1.7}$$

ta được

$$u(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(s)\, u(s)\, ds = f(x). \tag{1.8}$$

Giả sử phương trình (1.8) có nghiệm. Ký hiệu

$$\int_a^b b_k(s)\, u(s)\, ds = C_k. \tag{1.9}$$

Từ (1.8) và (1.9) suy ra

$$u(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x) + f(x), \quad a < x < b. \tag{1.10}$$

Nhân hai vế của (1.10) với $b_m(x)$, tích phân theo x trên (a, b), sử dụng ký hiệu (1.9), ta được hệ phương trình đại số tuyến tính

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{mk} C_k = f_m, \quad m = 1, 2, ..., n, \tag{1.11}$$

trong đó

$$a_{mk} = \int_a^b a_k(x)\, b_m(x)\, dx, \quad f_m = \int_a^b f(x)\, b_m(x)\, dx.$$

Nếu hệ đại số tuyến tính (1.11) không có nghiệm thì rõ ràng phương trình (1.7) cũng không có nghiệm. Giả sử hệ (1.11) có nghiệm $C_1, C_2, ..., C_n$. Khi đó hàm $u(x)$, được xác định bởi công thức (1.10) sẽ là nghiệm của phương trình (1.8).

Định thức của hệ (1.11) là

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & -\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Rõ ràng $D(\lambda)$ là đa thức bậc n và $D(0) = 1$. Hệ (1.11) được viết dưới dạng

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{c} = \mathbf{f}, \tag{1.12}$$