ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----------

NGUYỄN SƠN HÀ

# PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN TRÊN TẬP SỐ TỰ NHIÊN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————————

NGUYỄN SƠN HÀ

# PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN TRÊN TẬP SỐ TỰ NHIÊN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên nghành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

# Mục lục

# Mở đầu

Phương trình hàm và bất phương trình hàm là một trong những nội dung chuyên đề quan trọng thuộc chương trình chuyên toán trong các trường trung học phổ thông chuyên. Các bài toán liên quan đến phương trình hàm và bất phương trình hàm thường là những bài toán khó, thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi cấp quốc gia, khu vực, Olympic sinh viên và quốc tế.

Phương trình hàm, bất phương trình hàm trong chương trình toán trung học phổ thông chuyên rất phong phú và đa dạng, thường khó phân loại chi tiết theo dạng bài và các chuyên đề riêng biệt.

Tuy nhiên, cho đến nay vấn đề về tài liệu tham khảo chuyên sâu về phương trình hàm và bất phương trình hàm dùng cho hệ trung học phổ thông chuyên viết bằng tiếng việt còn khá ít ỏi chủ yếu là các công trình nghiên cứu khoa học công bố bằng tiếng anh ở mức độ toán cao cấp và đi sâu vào lý thuyết của phương trình hàm và bất phương trình hàm viết ở bộ môn giải tích hàm dùng cho sinh viên đại học, các tài liệu viết bằng tiếng nước ngoài dễ tìm trên phương tiện Internet nên việc tìm tài liệu tham khảo cho toán phổ thông viết bằng tiếng việt còn rất khó khăn. Các bài tập về phương trình hàm và bất phương trình hàm trên các tập đã khó đối với các học sinh trung học phổ thông chuyên toán nói chung nên phương trình hàm và bất phương trình hàm trên tập số tự nhiên lại càng khó khăn hơn vì chúng được xét trên tập rời rạc.

Chính vì những khó khăn đã đề cập ở trên nên trong luận văn này tác giả cố gắng đưa các bài tập phương trình và bất phương trình hàm cơ bản trên tập số tự nhiên về những dạng toán cụ thể và dễ nhận biết hơn.

Những nội dung chính trong bài viết cụ thể như sau:

Chương 1. Phương trình hàm dạng Cauchy trên tập số tự nhiên.

1.1. Phương trình hàm Cauchy trên tập số tự nhiên.

1.2. Phương trình hàm Jensen trên tập số tự nhiên.

1.3. Phương trình hàm D'Alembert trên tập số tự nhiên.

1.4. Phương trình hàm đa ẩn trên tập số tự nhiên.

Chương 2. Bất phương trình hàm Cauchy trên tập số tự nhiên.

2.1. Bất phương trình hàm Cauchy trên tập số tự nhiên.

2.2. Bất phương trình hàm Jensen trên tập số tự nhiên.

2.3. Bất phương trình hàm D'Alembert trên tập số tự nhiên.

Chương 3. Một số dạng khác của bất phương trình hàm trên tập số tự nhiên.

3.1. Bất đẳng thức trong dãy số.

3.2. Bất đẳng thức hàm chuyển đổi các đại lượng trung bình.

3.3. Ví dụ áp dụng

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, người thầy đã trực tiếp tận tình chỉ bảo và hướng dẫn, cung cấp tài liệu và truyền đạt những kinh nghiệm về mặt nghiên cứu trong suốt quá trình làm luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy (cô) giáo trong khoa Toán - Tin, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học, Đại học Thái nguyên,Trường THPT Hiệp Hòa số 2 và các bạn đồng nghiệp đã giúp đỡ tạo điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

Thái Nguyên, 2014

Nguyễn Sơn Hà

# Chương 1

# Phương trình hàm trên tập số tự nhiên

## 1.1. Phương trình hàm dạng Cauchy trên tập số tự nhiên

### 1.1.1. Các lớp phương trình hàm dạng Cauchy liên tục

**Định lí 1.1** (Cauchy, [1]). *Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

*là hàm số dạng $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ tùy ý.*

**Định lí 1.2** (D'Alembert, [1]). *Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x + y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

*là một trong các hàm $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$ và $f(x) = a^x$, $1 \neq a \in \mathbb{R}^+$ tùy ý.*

**Định lí 1.3** (Dạng logarit, [1]). *Hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

*là hàm $f(x) = a \ln x$. $a \in \mathbb{R}$ tùy ý.*

**Định lí 1.4** (Dạng lũy thừa, [1]). *Hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

*là một trong các hàm $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$ và hàm $f(x) = x^m$. $0 \neq m \in \mathbb{R}$ tùy ý.*

### 1.1.2. Các lớp phương trình hàm dạng Cauchy trên tập số tự nhiên

• Tìm hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn điều kiện nào đó (trong đó $X$ có thể là $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$ ; $Y$ có thể là $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$).

• Tìm số hạng tổng quát của dãy số cho trước.

### 1.1.3. Các ví dụ

**Ví dụ 1.1.** [Đề đề nghị IMO 1988] Xác định hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $f(f(n) + \ f(m)) = n + m, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

***Lời giải.*** Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra. Ta thấy $f(x)$ là đơn ánh. Thật vậy, với $n, m \in \mathbb{N}$ và $f(n) = f(m)$, ta có

$f(f(n) + f(m)) = n + m \ = \ f(f(n) + f(n)) = n + n \to n = m.$

Với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, ta có

$f(f(n) + f(n)) = 2n = (n-1) + (n+1) = f(f(n-1) + f(n+1))$ nên $f(n) + f(n) = f(n-1) + f(n+1)$ (do $f$ là đơn ánh).

Theo nhận xét ban đầu thì $f$ là hàm số tuyến tính, tức là $f$ có dạng $f(n) = an + b$.

Thử lại ta phải có $a[(an+b) + (am+b)] + b = n + m$ với mọi $n, m \in \mathbb{N}$, từ đó được $a = 1, b = 0$. Vậy $f(n) = n$ là hàm số cần tìm.

**Ví dụ 1.2.** [Putnam 1963] Xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ đồng biến, thỏa mãn điều kiện: $f(2) = 2$ và $f(mn) = f(m) \cdot f(n), \forall m, n \in \mathbb{N}$.

***Lời giải.*** Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Do $f(x)$ là hàm số đồng biến $0 \leq f(0) < f(1) < f(2) = 2$ nên $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Đặt $f(3) = 3 + k, k \in \mathbb{N}; f(6) = f(2) \cdot f(3)$ thì $f(6) = 6 + 2k$.

Như vậy $f(5) \leq 5 + 2k$ nên $f(10) = f(2) \cdot f(5) \leq 10 + 4k$.

Lập luận tương tự được $f(9) \leq 9 + 4k$ nên $f(18) \leq 18 + 8k$, suy ra $f(15) \leq 15 + 8k$.

Mặt khác $f(3) = 3 + k; f(5) \geq 5 + k$ nên

$$f(15) = f(3)f(5) \geq (3 + k)(5 + k).$$

Tóm lại ta được: $(3 + k)(5 + k) \leq 15 + 8k \Leftrightarrow k^2 \leq 0 \Leftrightarrow k = 0.$

Vậy $f(3) = 3.$

Ta sẽ chứng minh $f(2^n + 1) = 2^n + 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy, hiển nhiên, khẳng định đúng với $n = 1$.

Giả sử khẳng định đúng tới n, tức là: $f(2^n + 1) = 2^n + 1$, khi đó $f\left(2^{n+1} + 2\right) = f(2)f(2^n + 1) = 2(2^n + 1) = 2^{n+1} + 2.$

Do $f$ là hàm số đồng biến và là đơn ánh nên tập

$\left\{f(2^n + 2); f(2^n + 3); \ldots; f(2^{n+1} + 2)\right\}$ gồm $2^n$+1 số đôi một khác nhau, sắp xếp theo thứ tự tăng dần, là ảnh của tập gồm $2^n + 1$ số đôi một khác nhau $\left\{2^n + 2; 2^n + 3; \ldots; 2^{n+1} + 2\right\}$.

Như vậy, ta có $f(2^n + i) = 2^n + i$, với mọi $i \in \{2; 3; \ldots; 2^n + 2\}$ tức là $f(2^n + 1) = 2^n + 1.$

Nói cách khác, khẳng định đúng tới $n + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lập luận hoàn toàn tương tự ta cũng được $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Dễ thấy hàm số này thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy $f(n) = n$ là hàm số cần tìm.

**Ví dụ 1.3.** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(0) = 1; f(1) = 2; f(n + 1) f^2(n - 1) = f^3(n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

***Lời giải.*** Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $f(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lấy lôgarit của các biểu thức trên ta được: $\ln f(0) = 0, \ln f(1) = \ln 2$ và $\ln f(n + 1) + 2\ln f(n - 1) = 3\ln f(n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Đặt $x_n = \ln f(n), (n \in \mathbb{N})$ ta được phương trình sai phân tuyến tính: $x_0 = 0; x_1 = \ln 2; x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$.

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ hoặc $\lambda = 2$.

Nghiệm tổng quát: $x_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n = A + B \cdot 2^n$.

Từ các điều kiện đã cho ta được:
$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=\ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\ln 2 \\ B=\ln 2 \end{cases}$
Suy ra $x_n = (2^n-1)\cdot\ln 2 = \ln 2^{2^n-1} f(n)$.
Từ đó ta được $f(n) = 2^{2^n-1}$.
Dễ thấy hàm số này thỏa mãn phương trình đã cho.
Vậy hàm số cần tìm là $f(n) = 2^{2^n-1}$, $(n \in \mathbb{N})$.

**Ví dụ 1.4.** Xác định hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm:

$$f(0)=2, f(n+1)=3f(n)+\sqrt{8f^2(n)+\ 1}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

***Lời giải.*** Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra.
Từ giả thiết ta có:

$$f(n+1)-3f(n)=\sqrt{8f^2(n)+1}\ (\geq 1>0, \forall n\in\mathbb{N}),$$

nên

$$(f(n+1)+3f(n))^2 = 8f^2(n)+1.$$

Suy ra

$$f^2(n+1)+f^2(n) = 6f(n)f(n+1)+1. \tag{1.1}$$

Thay $n$ bởi $n-1$ ta được

$$f^2(n)+f^2(n-1) = 6f(n-1)\cdot f(n)+1. \tag{1.2}$$

Trừ từng vế của (1.2) cho (1.1), ta được
$f^2(n+1)-f^2(n-1) = 6f(n)(f(n+1)-f(n-1))$.
Từ giả thiết ta còn có $f(n)>0$ với mọi $n$ (chứng minh bằng quy nạp).
Ngoài ra $f(n+1)>3f(n)=9f(n-1)+3\sqrt{8f^2(n-1)+1}>f(n-1)$ nên $f(n+1)-f(n-1)>0$ nên $f(n+1)+f(n-1)=6f(n)$.
Vậy ta được phương trình sai phân tuyến tính

$$f(0)=2, f(1)=6+\sqrt{33}, f(n+2)-6f(n+1)+f(n)=0, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Giải phương trình này ta được:

$$f(n)=\frac{(8+\sqrt{66})(3+\sqrt{8})^n}{8}+\frac{(8-\sqrt{66})(3-\sqrt{8})^n}{8}.$$

Dễ thấy hàm số $f(n)$ trên là hàm số cần tìm.

**Ví dụ 1.5.** Tìm hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(1) > 0; f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n), \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

***Lời giải.*** Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra. Ta có $f(1) = f(1^2 + 0^2) = f^2(1) + f^2(0)$ nên $f(0) = 0; f(1) = 1$.

Theo bài ra, cho $m = 0$ được $f(n^2) = f^2(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $f(2) = f(1^2 + 1) = 2f^2(1) = 2$,

$f(4) = f(2^2) = f^2(2) = 2^2 = 4$,

$f(5) = f(2^2 + 1^2) = f^2(2) + f^2(1) = 4 + 1 = 5$,

$f(25) = f(5^2) = 25 = f(3^2 + 4^2) = f^2(3) + f^2(4) = f^2(3) + 4$,

nên $f(3) = 3$,

$f(100) = f(10^2) = \left(f\left(3^2 + 1^2\right)\right)^2 = \left(f^2(3) + f^2(1)\right)^2 = \left(3^2 + 1^2\right)^2 = 100$,

$f(100) = f(6^2 + 8^2) = f^2(6) + f^2(8) = f^2(6) + f^2(2^2 + 2^2)$

$= f^2(6) + \left(f^2(2) + f^2(2)\right)^2 = f^2(6) + (4 + 4)^2 = f^2(6) + 64$

$\Rightarrow f(6) = 6$.

Ta sẽ chứng minh

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3}$$

Thật vậy, theo trên đã đúng đến $n = 6$.

Giả sử (1.3) đúng với mọi $m < n, (n \geq 6)$. Khi đó, nếu $n = 2k + 1$ và do $(2k + 1)^2 + (k - 2)^2 = (2k - 1)^2 + (k + 2)^2$ nên ta có

$$\begin{cases} f((2k + 1)^2 + (k - 2)^2) = f^2(2k + 1) + f^2(k - 2) \\ f((2k - 1)^2 + (k + 2)^2) = f^2(2k - 1) + f^2(k + 2) \end{cases}$$

Suy ra $f^2(2k + 1) + f^2(k - 2) = f^2(2k - 1) + f^2(k + 2)$.

Mà $0 < k - 2 < k + 2 < 2k - 1 < 2k + 1 = n$ nên theo giả thiết quy nạp, ta có: $\begin{cases} f^2(k - 2) = (k - 2)^2 \\ f^2(2k - 1) = (2k - 1)^2 \\ f^2(k + 2) = (k + 2)^2 \end{cases}$

Suy ra $f^2(2k + 1) = (2k - 1)^2 + (k + 2)^2 - (k - 2)^2 = (2k + 1)^2$.

Vậy ta có $f(n) = f(2k + 1) = 2k + 1 = n$.

Tương tự, khi $n = 2k + 2$ sử dụng đẳng thức

$$(2k + 2)^2 + (k - 4)^2 = (2k - 2)^2 + (k + 4)^2,$$