ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - -

LÊ THỊ MINH ANH

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ HÀM SỖ

Chuyên ngành: Phương Pháp Toán Sơ Cấp
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS.NGUYỄN MINH KHOA

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2014

Mục lục

Mở đầu 2

1 Hàm số liên tục và khả vi 3

1.1 Giới hạn của hàm số một biến số 3

1.1.1 Các định nghĩa 3

1.1.2 Các tính chất của giới hạn 5

1.2 Sự liên tục của hàm một biến 7

1.2.1 Các định nghĩa 7

1.2.2 Các tính chất của hàm liên tục trên đoạn 7

1.3 Các định lý về hàm khả vi 8

1.3.1 Định lý Fecmat 8

1.3.2 Định lý Rolle 8

1.3.3 Định lý Lagrange 9

1.3.4 Định lý Cauchy 10

2 Một số bài toán tổng hợp về hàm số 11

2.1 Bài toán tổng hợp về hàm bậc hai trên bậc nhất $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ 11

2.1.1 Bài toán: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-mx+1}{x-1}$ 11

2.2 Bài toán tổng hợp $y = \dfrac{x^2-mx+1}{x-1}$ $(*)$ 25

2.3 Bài toán tổng hợp về hàm $y = ax^3+bx^2+cx+d$ 30

2.4 Một số đề thi học sinh giỏi 39

Kết luận 41

Tài liệu tham khảo 42

MỞ ĐẦU

Hàm số là một trong những phần cơ bản và trọng tâm của chương trình toán Trung học phổ thông. Trong đề thi đại học, cao đẳng và các kỳ thi Olympic luôn luôn có các bài tập về hàm số. Lý thuyết về hàm số liên tục và khả vi được sử dụng rất rộng rãi trong các bài tập cũng như các sách viết về hàm số.

Mục đích của đề tài luận văn là trình bày một số định lý quan trọng của hàm khả vi, liên tục từ đó áp dụng giải một số bài tập tổng hợp về hàm số. Luận văn trình bày và giải bài toán tổng hợp về hàm số bậc hai trên bậc nhất đồng thời đưa ra các bài toán tổng hợp về hàm số bậc ba.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương:

Chương 1 trình bày một số khái niệm và các định lý cơ bản về giới hạn, sự liên tục của hàm một biến, các định lý về hàm khả vi.

Chương 2 gồm 2 phần. Phần 1 trình bày bài toán tổng hợp về hàm số bậc hai trên bậc nhất với lời giải chi tiết. Phần 2 trình bày các bài toán tổng hợp hàm bậc 3.

Qua đây, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới người Thầy, người hướng dẫn luận văn cao học của mình, TS. Nguyễn Minh Khoa - trường Đại học Điện Lực. Thầy đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và giải quyết những thắc mắc cho tôi trong suốt quá trình tôi làm luận văn. Tôi cũng xin bày tỏ lời cảm ơn chân thành tới các Thầy Cô trong hội đồng chấm luận văn thạc sĩ, các Thầy Cô giảng dạy lớp Cao học Toán K6B, gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã tạo những điều kiện thuận lợi nhất để tôi có thể hoàn thiện khóa học cũng như luận văn của mình.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2014.

Học viên

Lê Thị Minh Anh

Chương 1

Hàm số liên tục và khả vi

1.1 Giới hạn của hàm số một biến số

1.1.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 1.1. Số A được gọi là giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0 (có thể không xác định tại x_0): $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Ví dụ 1.1. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 3) = 5$.

Chứng minh. Ta có $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall x : |x - 1| < \delta \Rightarrow |(2x + 3) - 5| < \varepsilon$.
Do đó theo định nghĩa ta có $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 3) = 5$.

□

Định nghĩa 1.2. Hàm $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của x_0 (có thể không xác định tại x_0) gọi là có giới hạn A khi $x \to x_0$ nếu đối với mọi dãy $x_n, x_n \neq x_0$ hội tụ đến x_0 thì dãy các giá trị của hàm tương ứng $f(x_1); f(x_2); f(x_3)...; f(x_n)...$ hội tụ đến A.

Ví dụ 1.2. *Chứng minh rằng* $\lim\limits_{x \to 0} x.sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Chứng minh. Ta nhận thấy hàm $f(x) = x.sin\dfrac{1}{x}$ không xác định tại $x_0 = 0$ nhưng xác định tại lân cận $x_0 = 0$. Lấy dãy x_n bất kì trong khoảng $(\dfrac{-\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4})$

sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Ta có:

$0 \leq |f(x_n)| = |x_n.sin\frac{1}{x_n}| \leq |x_n|$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \to \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

Vậy theo định nghĩa 2 ta có: $\lim\limits_{x\to 0} x.sin\frac{1}{x} = 0$.

□

Ví dụ 1.3. *Chứng minh rằng không tồn tại* $\lim\limits_{x\to 1} sin\frac{1}{x-1}$.

Chứng minh. Ta lấy hai dãy $x_n = 1 + \frac{1}{n\pi}$; $\tilde{x}_n = 1 + \frac{2}{(4n+1)\pi}$.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 1$. Dãy các giá trị tương ứng của hàm là

$f(x_n) = sin\frac{1}{1+\frac{1}{n\pi}-1} = sinn\pi = 0$,

$f(\tilde{x}_n) = sin\frac{1}{1+\frac{2}{(4n+1)\pi}} = sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = 1$.

Vậy theo định nghĩa 2, không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} sin\frac{1}{x-1}$.

□

Nhận xét 1.1. Định nghĩa 1 và định nghĩa 2 là tương đương.

Định nghĩa 1.3. Hàm số $y = f(x_n)$ xác định lân cận bên phải x_0. Số A được gọi là giới hạn bên phải của hàm số khi $x \to x_0$. Ký hiệu $A = \lim\limits_{x\to(x_0+0)} f(x) = f(x_0+0)$ nếu $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,$\forall x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Định nghĩa 1.4. Hàm $y = f(x)$ xác định tại lân cận bên trái x_0 (có thể không xác định tại x_0). Số A gọi là giới hạn trái của hàm $f(x)$ khi $x \to x_0$, ký hiệu $A = \lim\limits_{x\to(x_0-0)} f(x) = f(x_0-0)$ nếu $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Ví dụ 1.4. *Tìm giới hạn một phía của hàm số:*
$f(x) = 2014 + \dfrac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x-1}}}, x \to 1.$

Giải. Ta có: $\dfrac{1}{1-x} \to +\infty$ khi $x \to 1 - 0$.
Do đó $\dfrac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x-1}}} \to 0$. Vậy$f(1-0) = 2014$ khi $x \to 1+0$. Ta có $\dfrac{1}{1-x} \to -\infty$, do đó $5^{\frac{1}{x-1}} \to 0$. Vậy $f(1+0) = 2015$.

1.1.2 Các tính chất của giới hạn

Tính chất 1.1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, *A là một số hữu hạn khi đó hàm* $f(x)$ *là bị chặn trong một lân cận nào đó* $V(x_0)$, *tức là* $\exists$ *một số* $M > 0$ *sao cho:* $|f(x)| \leq M, \forall x \in V(x_0), x \neq x_0$.

Chứng minh. Điều kiện của định lý đảm bảo tồn tại một lân cận $V(x_0)$ sao cho: $1 > |f(x) - A| \geq |f(x)| - |A|$.
$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |A|$ vậy $1 + |A|$ đóng vai trò của M. Tính chất 1 được chứng minh. □

Tính chất 1.2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, A \neq 0$ *là số hữu hạn, khi đó có một lân cận* $V(x_0)$ *để sao cho* $|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}, \forall x \in V(x_0), x \neq x_0$.

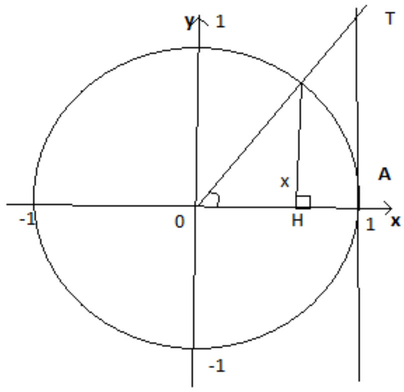
Tính chất 1.3. *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = A_1, \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A_2$ *và có một lân cận* $V(x_0) : f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in V(x_0), x \neq x_0$ *thì* $A_1 \leq A_2$.

Tính chất 1.4. *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$ *và* $f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x), \forall x \in V(x_0), x \neq x_0$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

Tính chất 1.5. *(Tiêu chuẩn Cauchy) Cần và đủ để* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *hữu hạn là hàm* $y = f(x)$ *xác định ở một lân cận của* x_0 *(có thể trừ ra* x_0*) và* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ *lân cận* $V(x_0)$ *sao cho:* $|f(x') - f(x")| < \varepsilon$, $\forall x', x" \in V(x_0); x', x" \neq x_0$.

Tính chất 1.6. *Cho* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B; A, B$ *hữu hạn.Khi đó:* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B; \lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)] = A.B$ *và nếu* $B \neq 0$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Ví dụ 1.5. *Chứng minh rằng* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sinx}{x} = 1$.



Chứng minh. Hàm $f(x) = \dfrac{sinx}{x}$ không xác định tại điểm $x_0 = 0$ nhưng xác định tại lân cận của nó chẳng hạn $V(x_0) = x : 0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Trường hợp 1: $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, từ hình vẽ ta có: $S_{\triangle AOM} < S_{quatAOM} < S_{\triangle AOT}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}OA.MH < \dfrac{1}{2}.OA\widehat{AM} < \dfrac{1}{2}.OA.AT$ (1.1)

$\Leftrightarrow MH < \widehat{AM} < AT \Leftrightarrow sinx < x < tanx \Leftrightarrow 1 < \dfrac{sinx}{x} < \dfrac{1}{cosx}$.

Trường hợp 2: $\dfrac{-\pi}{2} < x < 0$, đặt $x = -t \Rightarrow 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

Vì $cosx = cos(-t) = cost; \frac{sinx}{x} = \dfrac{sin(-t)}{-t} = \dfrac{sint}{t}$ và do $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ nên (1.1) vẫn đúng khi $\dfrac{-\pi}{2} < x < 0$.

Do $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{cosx} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sinx}{x} = 1$. □

1.2 Sự liên tục của hàm một biến

1.2.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 1.5. Hàm f(x) được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu nó thỏa mãn hai điều kiện:
i) f(x) xác định tại x_0 và lân cận.
ii) $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$. Điểm x_0 khi đó gọi là điểm liên tục của y = f(x).

Định nghĩa 1.6. Hàm f(x) được gọi là liên tục trái (hoặc phải) tại điểm x_0 nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:
i) f(x) xác định tại x_0 và lân cận trái hoặc phải của điểm x_0.
ii) $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ hoặc $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Định nghĩa 1.7. Hàm f(x) được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục tại $\forall x \in (a, b)$ và liên tục phải tại x = a, liên tục trái tại x = b.

1.2.2 Các tính chất của hàm liên tục trên đoạn

Tính chất 1.7. *Cho f(x) là hàm số liên tục trên [a,b] và* $f(a).f(b) < 0$. *Khi đó* $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Chứng minh. Không giảm tính tổng quát ta giả thiết f(a) < 0; f(b) > 0.
Đặt $\alpha_0 = a, \beta_0 = b \Leftrightarrow f(\alpha_0) < 0; f(\beta_0) > 0$.
Đặt $u_0 = \dfrac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$, nếu $f(u_0) = 0$ thì $c = u_0$, nếu $f(u_0 < 0)$ thì đặt $\alpha_1 = u_0, \beta_1 = \beta_0$ còn nếu $f(u_0 > 0)$ thì đặt $\alpha_1 = \alpha_0, \beta_1 = u_0$. Ta lại xét $[\alpha_1, \beta_1]$ và có $f(\alpha_1).f(\beta_1) < 0$.
Tiếp tục đặt $u_1 = \dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ và quá trình tiếp diễn với thuật toán lặp lại.Như vậy ta sẽ nhận được $[\alpha_n, \beta(n)], u_n = \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2}$.
Nếu $f(u_n) = 0$ thì $c = u_n$ và c chỉ là nghiệm của phương trình
f(x) = 0.
Nếu $f(u_n) < 0$ thì ta đặt $\alpha_{n+1} = u_n, \beta_{n+1} = \beta_n$; còn nếu $f(u_n > 0)$ thì đặt $\alpha_{n+1} = \alpha_n, \beta_{n+1} = u_n$.

Tiếp tục quá trình này ra vô hạn ta nhận được 2 dãy số α_n, β_n cùng hội tụ và có chung giới hạn là c. Từ đây ta nhận được f(c) = 0 và có điều phải chứng minh. □

Tính chất 1.8. *(Weierstrass 1) Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b] thì nó sẽ bị chặn trên đoạn ấy.*

Tính chất 1.9. *(Weierstrass 2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [a,b] thì nó đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn ấy.*

Tính chất 1.10. *Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b] và $\mu \in [m, M]$ $m = \min f(x), M = max f(x)$ thì $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = \mu$.*

1.3 Các định lý về hàm khả vi

1.3.1 Định lý Fecmat

Định lý 1.1. *Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a, b). Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại một điểm $c \in (a, b)$ và nếu tại c tồn tại đạo hàm hữu hạn $f'(c)$ thì $f'(c) = 0$.*

1.3.2 Định lý Rolle

Định lý 1.2. *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên đoạn $[a; b]$ và khả vi trong khoảng (a;b) giả sử $f(a) = f(b)$ khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chứng minh. Theo tính chất của hàm liên tục $\Rightarrow \exists M = \max f(x)$,
$m = min f(x)$.
Khi đó có hai khả năng xảy ra: hoặc cả 2 giá trị M, m đạt tại 2 mút a,b tức là: $f(a) = f(b) = m = M \Rightarrow f(x) = C(const), \forall x \in (a; b)$.
$\Rightarrow f'(n) = 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in (a; b)$ hoặc có một giá trị đạt tại $c \in (a; b)$ và theo định lý Fecmat ta có $f'(c) = 0$.

□

Ví dụ 1.6. *Cho $f(x) = (x - 1)(x - 2)...(x - 2014)$. Chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có đúng 2013 nghiệm.*

Chứng minh. Ta có $f_1 = f_2 = ... = f_{2014}$.
Áp dụng định lý Rolle cho các đoạn $[1; 2]; [2; 3]; ...; [2013; 2014]$
$\Rightarrow \exists c_1 \in [1; 2]; c_2 \in [2; 3]; ...; c_{2013} \in [2013; 2014]$ sao cho
$f'(c_1) = 0, f'(c_2) = 0, ..., f'(c_{2013}) = 0$.
Ta lại có do f(x) là đa thức bậc 2014 $\Rightarrow f'(x)$ là đa thức bậc 2013. $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ có đúng 2013 nghiệm $C_1; C_2; C_3; ...; C_{2013}$. □

Ví dụ 1.7. *Chứng minh rằng phương trình* $f(x) = x^2 - xsinx - cosx = 0$.

Giải. Vì $f\left(\frac{-\Pi}{2}\right) > 0, f(0) < 0, f\left(\frac{\Pi}{2}\right) > 0$ do đó theo tính chất của hàm liên tục f(x) = 0 có ít nhất 2 nghiệm.
Nếu f(x) = 0 có vô số nghiệm lớn hơn hoặc bằng 3 thì theo định lý Rolle $f'(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm nhưng vì $f'(x) = 2x - sinx - xcosx + sinx = x(2 - cosx) = 0$ chỉ có 1 nghiệm x = 0. Do đó f(x) = 0 chỉ có đúng hai nghiệm.

1.3.3 Định lý Lagrange

Định lý 1.3. *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định, liên tục trên [a, b] và khả vi trong (a, b), khi đó tồn tại ít nhất một điểm* $c \in (a, b)$ *sao cho*
$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Chứng minh. Xét hàm bổ trợ $h(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
$\forall x \in [a, b]$.
Thấy rằng hàm h(x) thỏa mãn định lý Rolle nên $\exists c \in (a, b)$: $h'(c) = 0$.
Vì $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow h'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \to$ $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}, c \in (a, b)$.
□

Ví dụ 1.8. *Cho* $0 < b < a$, *chứng minh:* $\dfrac{a - b}{a} < ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a - b}{b}$.

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = lnx$ trên$[a, b]$: f(x) liên tục trên đoạn $[b, a], f'(x) = 1, \forall x \in (b, a)$. Khi đó theo định lý Lagrange $\exists c \in (b, a)$ sao