ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THANH GIANG

QUỸ TÍCH KHÔNG COHEN-MACAULAY VÀ QUỸ TÍCH KHÔNG COHEN-MACAULAY SUY RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THANH GIANG

QUỸ TÍCH KHÔNG COHEN-MACAULAY VÀ QUỸ TÍCH KHÔNG COHEN-MACAULAY SUY RỘNG

CHUYÊN NGÀNH: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:PGS. TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

Thái Nguyên – 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là hoàn toàn trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn đã được sự đồng ý của cá nhân và tổ chức. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Tác giả luận văn

Trần Thanh Giang

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn. Cô đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô.

Tôi xin gửi tới các thầy cô Khoa Toán, Khoa Sau đại học Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên cũng như các thầy cô đã tham gia giảng dạy khóa học 2012-2014, lời cảm ơn sâu sắc nhất về công lao dạy dỗ trong suốt quá trình giáo dục, đào tạo của nhà trường.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và người thân quan tâm, tạo điều kiện, động viên, cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Lời nói đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noether địa phương với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$. Cho M là R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim M = d$.

Lớp môđun Cohen-Macaulay là lớp môđun quan trọng trong đại số giao hoán. Kí hiệu depth M là độ sâu của M trong $\mathfrak{m}$. Ta luôn có $\dim M \geq \operatorname{depth} M$. Ta nói M là môđun Cohen-Macaulay nếu $\operatorname{depth} M = \dim M$. Quỹ tích không Cohen-Macaulay của M, kí hiệu $\mathrm{nCM}(M)$, là tập tất cả các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R sao cho $M_{\mathfrak{p}}$ không là môđun Cohen-Macaulay. Năm 2002, M. Brodmann và R. Y. Sharp (Xem [BS1]) đã giới thiệu khái niệm tập giả giá của một môđun hữu hạn sinh nhằm xây dựng công thức bội cho các môđun đối đồng điều địa phương. Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. Giả giá thứ i của môđun M, kí hiệu là $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$ được cho bởi công thức:

$$\mathrm{Psupp}^i_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}.$$

Năm 2010, trong [CNN], Nguyễn Tự Cường, Lê Thanh Nhàn, Nguyễn Thị Kiều Nga đã mô tả tập $\mathrm{nCM}(M)$ qua tập $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$:

$$\mathrm{nCM}(M) = \bigcup_{0 \leqslant i < j \leqslant d} (\mathrm{Psupp}^i_R(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_R(M)).$$

Hơn nữa, nếu M đẳng chiều và vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là catenary thì tập giả giá $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$ đóng với $i = 0, 1, d$ và $\mathrm{nCM}(M) = \bigcup_{i=0}^{d-1} \mathrm{Psupp}^i_R(M)$.

Lớp môđun Cohen-Macaulay suy rộng được xem như sự mở rộng của môđun Cohen-Macaulay. Kí hiệu $e(\underline{x}, M)$ là số bội của M ứng với hệ tham số $\underline{x}$. Chú ý rằng $\ell_R(M/\underline{x}M) - e(\underline{x}, M) \geq 0$ với mọi hệ tham số $\underline{x}$. Hơn nữa, M là Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu $\ell_R(M/\underline{x}M) - e(\underline{x}, M) = 0$ với mọi hệ tham số $\underline{x}$. Một môđun M được gọi là môđun Cohen-Macaulay suy rộng nếu: $\sup\limits_{\underline{x}}(\ell_R(M/\underline{x}M) - e(\underline{x}, M)) < \infty$, trong đó $\underline{x}$ chạy trên tất cả các hệ tham số của M.

Quỹ tích không Cohen-Macaulay suy rộng của M, được kí hiệu là nGCM(M), là tập các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ sao cho $M_{\mathfrak{p}}$ không là Cohen-Macaulay suy rộng.

Giá suy rộng thứ i của M, được kí hiệu $\mathrm{Lsupp}^i_R(M)$ được định nghĩa bởi:

$$\mathrm{Lsupp}^i_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \ell_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_p}(M_{\mathfrak{p}})) = \infty\}.$$

Cũng giống như quỹ tích Cohen-Macaulay, quỹ tích không Cohen-Macaulay suy rộng được biểu diễn qua tập $\mathrm{Lsupp}^i_R(M)$ qua bài báo [NNK] của Lê Thanh Nhàn, Nguyễn Thị Kiều Nga, Phạm Hữu Khánh:

$$\mathrm{nGCM}(M) = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant d} (\mathrm{Lsupp}^i_R(M) \cap \mathrm{Lsupp}^j_R(M)).$$

Hơn nữa, nếu M là đẳng chiều và R là catenary thì

$$\mathrm{nGCM}(M) = \bigcup_{1 \leqslant i < d} \mathrm{Lsupp}^i_R(M).$$

Mục đích của luận văn là trình bày lại chi tiết một số kết quả trong hai bài báo: Nguyễn Tự Cường, Lê Thanh Nhàn, Nguyễn Thị Kiều Nga [CNN], *On pseudo supports and non-Cohen-Macaulay locus of finitely generated modules*, Journal of Algebra, (2010) và bài báo Lê Thanh Nhàn, Nguyễn Thị Kiều Nga, Phạm Hữu Khánh [NNK], *Non Cohen-Macaulay locus and non generalized Cohen-Macaulay locus*, Comm. Algebra, (2014). Để thuận tiện cho việc diễn giải, trong luận văn còn trình bày một số vấn đề như lý thuyết biểu diên thứ cấp của I. G. Macdonald trong bài báo [Mac], một số tính chất cơ sở của môđun đối đồng điều địa phương trong cuốn sách [BS] của Brodmann và Sharp.

Luận văn gồm 2 chương. Chương 1 trình bày một số vấn đề về chiều Krull, môđun đối đồng điều địa phương, dãy chính quy và độ sâu của môđun trong một iđêan, tính catenary cho các vành Noether, biểu diễn thứ cấp của môđun Artin. Chương 2 là phần chính của luận văn trình bày khái niệm vành và mô đun Cohen-Macaulay, vành và môđun Cohen-Macaulay suy rộng, mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay qua tập giả giá, mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay suy rộng qua giá suy rộng.

Chương 1

Kiến thức cơ sở

Trong suốt chương này, luôn giả thiết R là một vành giao hoán Noether và M là một môđun hữu hạn sinh. Mục đích của Chương này là trình bày những kiến thức cơ sở về chiều, độ sâu, môđun đối đồng điều địa phương, biểu diễn thứ cấp, phục vụ cho chứng minh các kết quả của chương sau.

1.1 Chiều Krull

Định nghĩa 1.1.1. Một dãy $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset ... \subset \mathfrak{p}_n$ các iđêan nguyên tố của R thỏa mãn điều kiện $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$ với mọi i được gọi là một dãy iđêan nguyên tố độ dài n của R. *Chiều Krull của vành* R là cận trên đúng của tất cả độ dài của dãy các iđêan nguyên tố trong R. Chiều Krull của R được kí hiệu là $\dim R$.

Một vành giao hoán R được gọi là vành Noether nếu mọi dãy tăng các iđêan của R đều dừng. Chú ý rằng R là vành Noether nếu và chỉ nếu mọi iđêan của R là hữu hạn sinh. Một vành giao hoán R được gọi là vành Artin nếu mọi dãy giảm các iđêan của R đều dừng. Chú ý rằng nếu R là vành Artin thì R là vành Noether và mỗi iđêan nguyên tố của

R đều là iđêan tối đại.

Ví dụ 1.1.2. a) Với k là một trường, ta có vành đa thức vô hạn biến $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ là $R = k[X_1, X_2, ..., X_n, ...]$. Ta có $\dim R = \infty$ vì xích các iđêan nguyên tố:

$$(X_1) \subset (X_1, X_2) \subset ... \subset (X_1, X_2, ..., X_n).$$

sẽ có độ dài n tùy ý.

b) Nếu R là vành Artin thì $\dim R = 0$, vì mỗi iđêan nguyên tố của R đều là một iđêan cực đại.

c) Vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ có $\dim \mathbb{Z} = 1$, vì 0 là một iđêan nguyên tố, còn mọi iđêan nguyên tố khác không là cực đại và có dạng $p\mathbb{Z}$ với p là số nguyên tố.

Một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là iđêan nguyên tố liên kết nếu tồn tại một phần tử $m \in M$ sao cho $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R m$. Tập các iđêan nguyên tố liên kết của M được kí hiệu là $\operatorname{Ass}_R M$. Chú ý rằng tập các iđêan nguyên tố tối thiểu chứa $\operatorname{Ann}_R M$ chính là tập các iđêan tối thiểu trong $\operatorname{Ass}_R M$. Vì thế ta có công thức tính chiều qua chiều của các iđêan nguyên tố liên kết như sau.

Bổ đề 1.1.3.

$$\dim M = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M\}.$$

Mệnh đề 1.1.4. ([Mat, Định lí 15.4]). *Gọi $R[X_1, \ldots, X_n]$ là vành đa thức của n biến với hệ số trong vành R. Gọi $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ là vành các chuỗi lũy thừa hình thức của n biến với hệ số trong R, khi đó ta có công thức tính chiều của vành đa thức và vành các chuỗi lũy thừa hình thức:*

(i) $\dim R[x_1, ..., x_n] = n + \dim R.$

(ii) $\dim R[[x_1, ..., x_n]] = n + \dim R.$