ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ BẠCH PHƯỢNG

TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN CHỨA TOÁN TỬ CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN CHỨA TOÁN TỬ CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: **60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN ĐÌNH BÌNH

Thái Nguyên - Năm 2014

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Đình Bình. Các kết quả trong luận văn được nghiên cứu và trình bày dựa trên các kết quả nghiên cứu của giáo viên hướng dẫn.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2014
Tác giả

Nguyễn Thị Bạch Phượng

Xác nhận của khoa chuyên môn

Xác nhận của GV hướng dẫn

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của Tiến sĩ Nguyễn Đình Bình, Bộ Khoa học và Công nghệ. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và lòng quý mến đối với thầy.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Khoa Sau đại học, Khoa Toán trường Đại học sư phạm- Đại học Thái Nguyên, Trung tâm học liệu - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình tác giả học tập tại trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K20 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn giúp tác giả hoàn thành luận văn này.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2014
Tác giả

Nguyễn Thị Bạch Phượng

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử phát triển và lý do chọn đề tài:

Các phương trình đạo hàm riêng tiến hóa phi tuyến xuất hiện nhiều trong các quá trình của vật lí, hóa học và sinh học, chẳng hạn các quá trình truyền nhiệt và khuếch tán, quá trình truyền sóng trong cơ học chất lỏng, các phản ứng hóa học, các mô hình quần thể trong sinh học,...Việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ. Chính vì vậy nó đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Các vấn đề đặt ra là nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán (sự tồn tại duy nhất nghiệm, sự phụ thuộc liên tục của nghiệm theo dữ kiện đã cho) và các tính chất định tính của nghiệm (tính trơn, dáng điệu tiệm cận của nghiệm,...).

Sau khi nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán, việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi thời gian ra vô cùng rất quan trọng vì nó cho phép ta hiểu và dự đoán xu thế phát triển của hệ động lực trong tương lai, từ đó ta có thể có những điều chỉnh thích hợp để đạt được kết quả mong muốn. Về mặt toán học, điều này làm nảy sinh một hướng nghiên cứu mới, được phát triển mạnh mẽ trong khoảng ba thập kỉ gần đây là Lí thuyết các hệ động lực vô hạn chiều. Lí thuyết này nằm ở giao của 3 chuyên ngành là Lí thuyết hệ động lực, Lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng và Lí thuyết phương trình vi phân thường (xem Bảng phân loại toán học năm 2010). Bài toán cơ bản của lí thuyết này là nghiên cứu sự tồn tại và các tính chất cơ bản của tập hút, chẳng hạn đánh giá số chiều fractal hoặc số chiều Hausdorff, sự phụ thuộc liên tục của tập hút theo tham biến, tính trơn của tập hút, xác định các modes...

Tập hút toàn cục cổ điển là một tập compact, bất biến, hút tất cả các quỹ đạo của hệ và chứa đựng nhiều thông tin về dáng điệu tiệm cận của hệ. Cụ thể với mỗi quỹ đạo cho trước của hệ và một khoảng thời gian T tùy ý, ta đều tìm được một quỹ đạo nằm trên tập hút toàn cục mà dáng điệu khi thời gian đủ lớn của hai quỹ đạo này sai khác đủ nhỏ trên một khoảng có độ dài T. Tuy nhiên, tập hút toàn cục chỉ áp dụng cho các trường hợp ôtônôm, trong khi rất nhiều quá trình có ngoại lực phụ thuộc vào thời gian. Do đó cần phải mở rộng khái niệm tập hút cho các hệ động lực không ôtônôm. Việc mở rộng nghiên cứu về tập hút đã dẫn đến khái niệm tập hút đều cho trường hợp quỹ đạo nghiệm bị chặn khi thời gian t tiến ra vô hạn.

Trong ba thập kỉ gần đây, nhiều nhà toán học đã nghiên cứu và thu được nhiều kết quả về lí thuyết tập hút đối với nhiều lớp phương trình vi phân đạo hàm riêng (xem,chẳng hạn, cuốn chuyên khảo [4] và bài tổng quan [3]). Một trong những lớp phương trình đạo hàm riêng được nghiên cứu nhiều nhất là lớp phương trình parabolic. Lớp phương trình này mô tả nhiều quá trình trong vật lí, hóa học và sinh học như quá trình truyền nhiệt, quá trình phản ứng khuếch tán, mô hình toán học trong sinh học quần thể,...

Sự tồn tại tập hút toàn cục đối với phương trình và hệ phương trình parabolic nửa tuyến tính không suy biến đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, trong cả miền bị chặn và không bị chặn (xem [10], [15]). Tính liên tục của tập hút toàn cục đối với các bài toán parabolic được nghiên cứu trong các công trình [3], [9], [10], [14].

Sự hiểu biết về các tính chất liên quan đến hệ động lực là một trong những vấn đề quan trọng của vật lý toán học hiện đại. Đối với các phương trình cơ bản trong lý thuyết tối ưu véctơ bao gồm quan trọng trong hệ thống nói trên từ quan điểm của các thuyết ở hệ thống động lực, nó cần thiết để phát triển một lý thuyết tương đương cho nửa quá trình đa trị.

Trong những năm qua, đã có một số lý thuyết mà người ta có thể nghiên cứu nhiều giá trị biến thiên và các hàm của chúng, bao gồm cả lý thuyết tổng quát của Ball, lý thuyết về lực hút quỹ đạo của Cheppuzhov và Vishik [8] và lí thuyết về nửa quá trình đa trị của Melnik và Valero

[19],[21]. Nhờ những lý thuyết đó, một số kết quả liên quan đến tập hút gần đây đưa ra sự khác biệt trong trường hợp phương trình thông thường [20], [21], phương trình parabolic [16], [27]...
Trong luận văn này chúng tôi giả thiết Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N, N \geq 2$ có biên là ∂_Ω và xét bài toán sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - div(|x|^{-p\gamma}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(t,u) = g(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > \tau,& \\ u|_{t=\tau} = u_\tau(x), \;\; x \in \Omega,& \\ u|_{\partial_\Omega} = 0,& \end{aligned} \tag{1.1}$$

trong đó $\tau \in \mathbb{R}, u_\tau \in L^2(\Omega)$, f phi tuyến, ngoại lực g, các số p, γ thỏa mãn những điều kiện sau:

(H1): $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn:

$$|f(t,u)| \leq C_1|u|^{q-1} + k_1 \tag{1.2}$$

$$uf(t,u) \geq C_2|u|^q - k_2 \tag{1.3}$$

với $q \geq 2, C_1, C_2, k_1, k_2$ là các số dương;

(H2): $g \in L^2_c(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ trong đó $L^2_c(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ là tập tất cả các hàm compact trong $L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ được đưa ra trong định nghĩa 1.4.1 dưới đây;

(H3):

$$\frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2 \text{ và } \frac{N}{p} - \frac{N}{2} \leq \gamma + 1 < \frac{N}{p}.$$

Ta đưa ra giả thiết (H1)-(H3). Phi tuyến f giả sử có một sự phát triển đa thức và thỏa mãn điều kiện tiêu chuẩn.

Một ví dụ điển hình của các hàm thỏa mãn điều kiện (H1) là
$f(t,u) = |u|^{q-2}u.arctant, q \geq 2$ (xem [7] chương 5 phần 3.3 và 3.5) dịch gọn các đại lượng kí hiệu trong $L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$. (H3) là điều kiện đảm

bảo $D^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega)$ là không gian năng lượng tự nhiên có liên quan đến việc giải bài toán (1.1), được định nghĩa trong phần 1.1 của luận văn. Đây là điều kiện quan trọng để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1.1) bằng cách sử dụng phương pháp compact. Bài toán (1.1) có liên quan đến bất đẳng thức Caffarelli-Kohn-Nirenberg [5], có chứa một số vấn đề quan trọng của phương trình parabolic. Chẳng hạn như phương trình nhiệt nửa tuyến tính (khi $\gamma = 0, p = 2$), phương trình parabolic suy biến (khi $p = 2$), các phương trình p-Laplacian(khi $\gamma = 0, p \neq 2$)...

Sự tồn tại và tính chất của bài toán (1.1) đã thu hút được sự quan tâm của các nhà Toán học trong những năm gần đây [2], [12]. Tuy nhiên sự hiểu biết tốt nhất của chúng tôi, dường như ít được đưa ra trong khoảng thời gian dài để giải bài toán (1.1.)

Trong luận văn này, với mục tiêu dựa trên kết quả của công trình [23], chúng tôi nghiên cứu và trình bày chi tiết cách giải bài toán (1.1) qua nhiều bước, thông qua khái niệm về tập hút toàn cục thống nhất cho nửa quá trình đa trị. Ở đây không có hạn chế sự xác định của hàm phi tuyến f và các điều kiện đối với f để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1.1), nhưng không tối ưu. Vì vậy, để đưa ra các giải pháp chúng ta cần sử dụng các lí thuyết về tập hút cho quá trình đa trị. Đi theo đường lối chung của phương pháp này được sử dụng trong [16], [17], [22], [27] cho phương trình parabolic không suy biến, chúng tôi chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục trong trường hợp ôtônôm và không ôtônôm. Cần lưu ý rằng khi phi tuyến f không phụ thuộc vào thời gian t, sự tồn tại ít nhất một nghiệm của phương trình (1.1) ngược lại trường hợp suy biến nửa tuyến tính, cụ thể khi $g = 0$ và $p = 2$, đã được nghiên cứu trong [16], [17]. Điều đáng chú ý là khi có điều kiện bổ sung trên f, ví dụ $f'_u(t,u) \geq -C_3$ cho tất cả $t > \tau$, $u \in \mathbb{R}$ hoặc một giả thiết yếu hơn $(f(t,u) - f(t,v)).(u - v) \geq -C\,|u - v|^2$ với $t > \tau$, $u, v \in \mathbb{R}$, ta có thể chứng minh rằng sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (1.1).

Với những lí do ở trên, chúng tôi lựa chọn vấn đề nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1.1), chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của bài toán (1.1) trong hai trường hợp ôtônôm và không ôtônôm làm nội dung nghiên cứu của Luận văn với tên gọi : *"Tập hút toàn cục đối với một lớp phương trình parabolic phi tuyến chứa toán tử Caffarelli-Kohn-Nirenberg"*.

2. Mục đích của luận văn:

Mục đích của luận văn nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1.1) và sự tồn tại tập hút toàn cục đối với một lớp phương trình parabolic phi tuyến chứa toán tử Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

3. Nội dung chính:

- Chúng tôi nghiên cứu bài toán (1.1) đã nêu trên với hai nội dung sau:

• Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán.

• Chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục đối với bài toán trong hai trường hợp ôtônôm và không ôtônôm.

4. Phương pháp nghiên cứu:

• Sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và đánh giá xấp xỉ nghiệm để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1.1).

• Sử dụng phương pháp compact và các phương pháp trong lí thuyết của hệ động lực vô hạn chiều để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của bài toán (1.1) trong trường hợp ôtônôm và không ôtônôm.

5. Bố cục của Luận văn:

Luận văn bao gồm: Mở đầu, 3 chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày các khái niệm về không gian