**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**NGUYỄN THỊ HẢI HÀ**

# BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU TUYẾN TÍNH

**Chuyên ngành: Toán ứng dụng**

**Mã số: 62 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm**

**Thái Nguyên - Năm 2014**

# LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành sâu sắc tới PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm, người đã tận tình hướng dẫn về phương hướng, nội dung và phương pháp nghiên cứu trong suốt quá trình nghiên cứu, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Ban Giám Hiệu Trường Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng sau Đại Học đã tạo điều kiện rất thuận lợi về mọi mặt cho tác giả trong quá trình tác giả học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2014.

Tác giả

Nguyễn Thị Hải Hà

## CÁC KÝ HIỆU THƯỜNG DÙNG

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}^n$ | không gian Euclid $n$-chiều |
| $\langle x, y\rangle$ | tích vô hướng của x , y |
| $\\|.\\|$ | chuẩn Euclid trong $\mathbb{R}^n$ |
| $intS$ | miền trong của tập hợp $S$ |
| $\mathbb{R}^n_+$ | nón orthan dương trong $\mathbb{R}^n$ |
| $f : X \to Y$ | Ánh xạ từ $X$ vào $Y$ |
| $IMin(A)$ | Tập hữu hiệu lý tưởng của $A$ |
| $Min(A)$ | Tập hữu hiệu của $A$ |
| $WMin(A)$ | Tập hữu hiệu yếu của $A$ |
| $(MOLP)$ | Bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính |
| $IS(X, f)$ | Tập cực tiểu lý tưởng của (MOLP) |
| $S(X, f)$ | Tập cực tiểu của (MOLP) |
| $WS(X, f)$ | Tập cực tiểu yếu của (MOLP) |

# Mục lục

# Mở đầu

## 1. Lý do chọn đề tài

Tối ưu đa mục tiêu tuyến tính [2], [4], [5] có nhiều ứng dụng trong lý thuyết cũng như trong các bài toán thực tế. Lý thuyết tối ưu đa mục tiêu tuyến tính đã và đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu [4] và những tài liệu được trích dẫn trong đó. Sau một thời gian học Cao học, với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về toán ứng dụng, tôi chọn đề tài:
*"Bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính"* để nghiên cứu.

## 2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu nhằm nắm được các định nghĩa, định lí, tính chất của *"Bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính"* và các ứng dụng của bài toán liên quan đến các vấn đề thực tiễn. Qua đó, giúp củng cố các kiến thức đã được học như: giải tích lồi trong không gian $\mathbb{R}^n$, không gian affine, giải tích hàm,...

## 3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Hệ thống hoá các các kiến thức cơ sở liên quan đến bài toán.

Hệ thống hóa những nội dung cơ bản của bài toán *"Bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính"*.

## 4. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các kiến thức cơ bản của giải tích trong $\mathbb{R}^n$.

## 5. Đóng góp của luận văn

Đã trình bày được một cách tương đối có hệ thống về nội dung Bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính.

## 6. Cấu trúc luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận văn có 2 chương:

**Chương 1**: Trình bày một số kiến thức cơ bản về giải tích lồi, quan hệ thứ tự từng phần và một số khái niệm điểm hữu hiệu để sử dụng trong những phần sau.

**Chương 2**: Trình bày một số nội dung của Bài toán tối ưu đa mục tiêu tuyến tính bao gồm có sự tồn tại nghiệm, tính chất của tập nghiệm và vô hướng hóa.

# Chương 1

# Những kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm và kết quả sẽ sử dụng trong các phần sau. Nội dung trong chương này được lấy từ [1],[2],[3] và [4].

## 1.1 Tập lồi và tính chất

**Định nghĩa 1.1.**

*Một tập $M$ trong không gian $\mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu*

$\forall a, b \in M,\ \forall \lambda \in [0;1]$ *thì:*

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)\, b \in M.$$

*Nói cách khác, nếu $M$ là tập lồi thì nó chứa đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó.*

Nếu $x \in \mathbb{R}^n,\ x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x^i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ thì $x$ được gọi là tổ hợp lồi của $x^1, x^2, ..., x^n \in \mathbb{R}^n$.

**Mệnh đề 1.1.**

*Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ là lồi khi và chỉ khi nó chứa tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử thuộc $M$.*

**Định lý 1.1.**

*Nếu $M$, $N$ là hai tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ thì các tập sau cũng là lồi:*

$(i)$ $M \cap N$;

$(ii)$ $\lambda M + \beta N := \{x = \lambda a + \beta b : \; a \in M, \; b \in N; \; \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Dễ thấy, giao của một họ bất kỳ các tập lồi cũng là tập lồi.

**Định nghĩa 1.2.**

*Cho $S \subset \mathbb{R}^n$. Giao của tất cả các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ chứa $S$ là một tập lồi và được gọi là bao lồi của $S$ ký hiệu:* $\text{conv}S$.

*Rõ ràng,* $\text{conv}S$ *là tập lồi nhỏ nhất chứa $S$.*

**Định lý 1.2.**

*Bao lồi của tập $S \subset \mathbb{R}^n$ chứa tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử của nó.*

## 1.2 Tập affine

**Định nghĩa 1.3.**

*Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập affine nếu $\forall x, y \in M, \; t \in \mathbb{R}$ ta có:*

$$tx + (1-t)y \in M.$$

Dễ thấy mọi tập affine đều là tập lồi.

**Định nghĩa 1.4.**

*Đường thẳng đi qua 2 điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$ là tập hợp tất cả các điểm $x$ trong $\mathbb{R}^n$ có dạng:*

$$x = \lambda a + (1-\lambda)\, b, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

*Đoạn thẳng đi qua 2 điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$ ký hiệu là $[a, b]$, là tập:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda a + (1 - \lambda)\, b,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}\,.$$

**Định lý 1.3.**

*Nếu $M$ là tập affine khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ thì tồn tại không gian véc tơ con $W$ của $\mathbb{R}^n$ sao cho $M = a + W$, trong đó $a \in M$.*

**Định nghĩa 1.5.**

*Nếu $M$ là tập affine khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $W$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$ sao cho $M = a + W$, trong đó $a \in M$ thì $W$ được gọi là không gian con song song với $M$, số chiều của $W$ được gọi là số chiều của tập affine $M$.*

**Định nghĩa 1.6.**

*Cho một tập $S$ bất kỳ của $\mathbb{R}^n$. Giao của tất cả các tập affine trong $\mathbb{R}^n$ chứa $S$ là một tập affine. Ta gọi giao đó là bao affine của $S$, ký hiệu aff $S$.*

*Dễ thấy aff $S$ là tập affine nhỏ nhất chứa $S$.*

**Định nghĩa 1.7.**

*Cho $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta gọi tập:*

$$H = \{x \in R^n : \langle a, x\rangle = \alpha\}$$

*là một siêu phẳng (xác định bởi a và $\alpha$).*

Siêu phẳng là một tập affine có số chiều bằng $(n - 1)$ và có thể chứng minh được mọi tập affine có số chiều bằng $(n - 1)$ đều là siêu phẳng xác định bởi $a$ và $\alpha$ nào đó.

**Ví dụ 1.1.**

*Trong $\mathbb{R}^2$, mọi đường thẳng đều là một siêu phẳng.*

*Trong $\mathbb{R}^3$, mọi mặt phẳng đều là siêu phẳng.*

**Định nghĩa 1.8.**

*Cho* $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Tập hợp*

$$x = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leqslant \alpha\}$$

*được gọi là nửa không gian đóng.*

*Tập hợp*

$$x = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle < \alpha\}$$

*được gọi là nửa không gian mở.*

## 1.3 Tập lồi đa diện

**Định nghĩa 1.9.**

*Tập lồi đa diện là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng. Nói cách khác, tập lồi đa diện là tập nghiệm của một hệ bất đẳng thức tuyến tính có dạng:*

$$\langle a^i, x \rangle \leqslant b_i \;,\; i = 1, 2, ..., n,$$

*trong đó* $a^i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R}$.

*Một tập lồi đa diện bị chặn thì được gọi là đa diện lồi .*

Một tập lồi đa diện là bao lồi của một số hữu hạn điểm và một số hữu hạn đoạn thẳng.

Một đa diện lồi là bao lồi của một số hữu hạn điểm.

Cho một tập lồi đa diện $M$, tập con $F \subset M$ được gọi là diện nếu:

$$x \in F,\;\; a, b \in M,\;\; 0 < \lambda < 1,\;\; x = \lambda a + (1 - \lambda)\, b \in F$$

$$\Rightarrow a, b \in F.$$