ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

––––––––––––

NGUYỄN THỊ LUYẾN

PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN THỊ LUYẾN

PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS.NGUYỄN VIỆT HẢI

Thái Nguyên - Năm 2014

Mục lục

Lời nói đầu

Diện tích là một trong những nội dung quan trọng trong Hình học phổ thông, các bài toán tính diện tích, chứng minh diện tích các hình luôn là các bài toán có mặt trong các kì thi học sinh giỏi các cấp. Nhiều bài toán Hình học bề ngoài không chứa yếu tố diện tích nhưng nếu người làm toán biết khéo léo dùng yếu tố diện tích thì sẽ nhận được một lời giải hay, bất ngờ, có những trường hợp nếu không sử dụng diện tích thì không thể giải được. Đây là cơ sở khoa học để tác giả lựa chọn đề tài cho bản luận văn **"Phương pháp diện tích"**.

Dưới tiêu đề trên tác giả đã tìm ra một phương pháp hay để giải quyết các bài toán Hình học phẳng: Tính diện tích các hình và dùng diện tích như một công cụ hỗ trợ để giải các bài toán hình học. Bản luận văn gồm Lời nói đầu, hai chương, Kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1. Khái niệm diện tích, phương pháp tính diện tích.

Chương này nhằm xây dựng lại khái niệm diện tích của một hình. Bắt đầu từ diện tích đa giác được xây dựng bằng phương pháp tiên đề, đây là những yếu tố cơ sở để có khái niệm về hình khả diện, đồng thời các công thức đơn giản nhất, cơ bản nhất để tính diện tích các hình.

Ngoài cách tính diện tích bằng cách áp dụng trực tiếp các công thức, ta còn áp dụng được phương pháp tọa độ và tích phân xác định. Mỗi phương pháp được làm rõ bởi các kỹ thuật và minh họa bằng các bài toán điển hình. Nội dung chương gồm các phần:

- Các tiên đề về diện tích.

- Tính diện tích bằng cách áp dụng các công thức.

- Tính diện tích bằng công cụ tích phân.

Chương 2. Phương pháp diện tích trong hình học phẳng.

Chương này tác giả đưa ra một phương pháp mới gọi là kỹ thuật "*sử dụng diện tích như chất xúc tác*". Kỹ thuật này được dùng để:

- Giải các bài toán chứng minh hình học (chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, chứng minh hệ thức, chứng minh tính song song, tính đồng quy của các đường thẳng, tính thẳng hàng của các điểm, chứng minh các bất đẳng thức hình học...).

- Giải các bài toán về tìm cực trị hình học, các bài toán tính toán.

- Giải các bài toán về dựng hình.

- Giải các bài toán tính tập hợp điểm (quỹ tích).

Chính kỹ thuật "*dùng diện tích như chất xúc tác*" là ý tưởng cơ bản của phương pháp diện tích mà chúng tôi nghiên cứu trong đề tài này.

Tài liệu tham khảo gồm 8 danh mục.

Tác giả đã nhận được sự giúp đỡ tận tình của thày hướng dẫn, PGS.TS Nguyễn Việt Hải, trong việc tìm hiểu các vấn đề của bản luận văn và trình bày theo một trình tự logic. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới tập thể các thày, cô của Khoa Toán- Tin, Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên; các thày, cô của Viện Toán học- Viện Khoa học Việt Nam và thày hướng dẫn; những người đã tận tình giảng dạy, giúp đỡ tác giả trong suốt khóa học cao học tại Đại học Thái Nguyên và hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 19 tháng 9 năm 2014

Tác giả

Nguyễn Thị Luyến

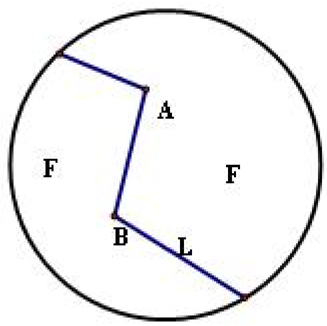
Chương 1

Khái niệm diện tích, phương pháp tính diện tích

1.1 Các tiên đề về diện tích. Các hình khả diện

1.1.1 Diện tích đa giác. Định lý tồn tại và duy nhất

Lấy trên mặt phẳng Euclide $\mathbb{E}^2$ một hình F nào đó và giả sử đường gấp khúc $L \subset F$ chia hình $F \setminus L$ thành 2 phần F_1,F_2 . Ta nói hình F được chia thành các hình $F_1' = F_1 \cup L$; $F_2' = F_2 \cup L$ còn hình F được gọi là tổng của các hình F_1', F_2' và viết $F = F_1' + F_2'$.



Hình 1.1:

Nhớ lại rằng đa giác là một hình phẳng mà có thể chia được thành một số hữu hạn các tam giác. Đa giác được gọi là đa giác đơn nếu biên của nó nó là đường gấp khúc khép kín, không có điểm kỳ dị.

Ta ký hiệu M là tập hợp các đa giác trên mặt phẳng Euclide $\mathbb{E}^2$. Ta nói rằng diện tích đa giác được xác định nếu ánh xạ $\mathrm{S} : \mathrm{M} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{*}$ thỏa mãn các tiên đề sau:

i. F $\cong$ F' $\Rightarrow$ S(F) = S(F') *(bất biến qua phép dời hình).*

ii. F = G + H $\Rightarrow$ S(F) = S(G) + S(H) *(Tính chất cộng tính của S).*

iii. $S(F_0) = 1$ *với* F_0 *là hình vuông có cạnh bằng 1. Số dương* S(F) *được gọi là độ đo hay diện tích của đa giác F.*

Định lý 1.*Nếu hàm S(F) tồn tại thì đối với hình chữ nhật P cạnh có độ dài x, y hàm S có dạng S(P)=xy.*

Chứng minh. Giả sử hàm S(F) tồn tại và ta xét nó trên tập hợp M_0 tất cả các hình chữ nhật. Khi đó S(P) là hàm của x và y xác định với mọi $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ và chỉ nhận giá trị dương: S(P)=f(x,y). Hàm này có các tính chất sau:

(a) *f(x,y) = f(y,x).*

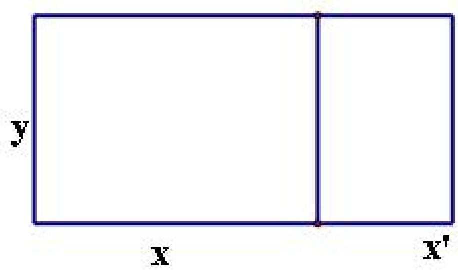
(b) $f(x_1{+}x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$.

Tính chất (a) suy ra từ điều kiện i. Với chú ý rằng hai đa giác có cạnh x, y và cạnh là y, x là hai đa giác bằng nhau.

Tính chất (b) suy ra từ điều kiện ii. Ta ký hiệu $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\,|_{\mathrm{y=const}} = \mathrm{g}(\mathrm{x})$.

Từ tính chất (b) suy ra: $\mathrm{g}(\mathrm{x}_1{+}\mathrm{x}_2) = \mathrm{g}(\mathrm{x}_1) + \mathrm{g}(\mathrm{x}_2), \forall \mathrm{x}_1, x_2 \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Theo kết quả của giải tích, hàm g(x) có tính chất này, xác định trên tập



Hình 1.2:

hợp $\mathbb{R}_{+}^{*}$ và chỉ nhận giá trị dương, được biểu diễn bởi g(x) = k.x, trong đó k = const. Nghĩa là $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\,|_{\mathrm{y=const}} = \mathrm{k.x}$.

Với các giá trị y = const khác nhau thì giá trị k cũng khác nhau, bởi vậy ta phải coi k = k(y). Như thế ta nhận được f(x,y) = k(y).x. Đặt x = 1 ta được f(1,y) = k(y). Bởi vậy ta có tính chất (c): f(x,y) = f(1,y).x.Từ (a) và (c) suy ra: f(1,y) = f(y, 1) = f(1,1).y và (b) có dạng f(x,y) = f(1,1).x.y. Nhưng theo tiên đề iii. f(1,1) = 1. Do đó, S(P) = x.y.(đpcm)

Hình vuông F_0 sao cho $S(F_0) = 1$ được gọi là hình vuông đơn vị. Rõ ràng hình vuông này xác định nếu chọn được đoạn thẳng đơn vị. Điều kiện tích của hai đoạn thẳng được hiểu là tích hai độ dài của chúng.

Hệ quả 1. *Nếu hàm S(F) tồn tại thì*:

i. *Với hình chữ nhật P, số S(P) bằng tích của đáy và đường cao.*

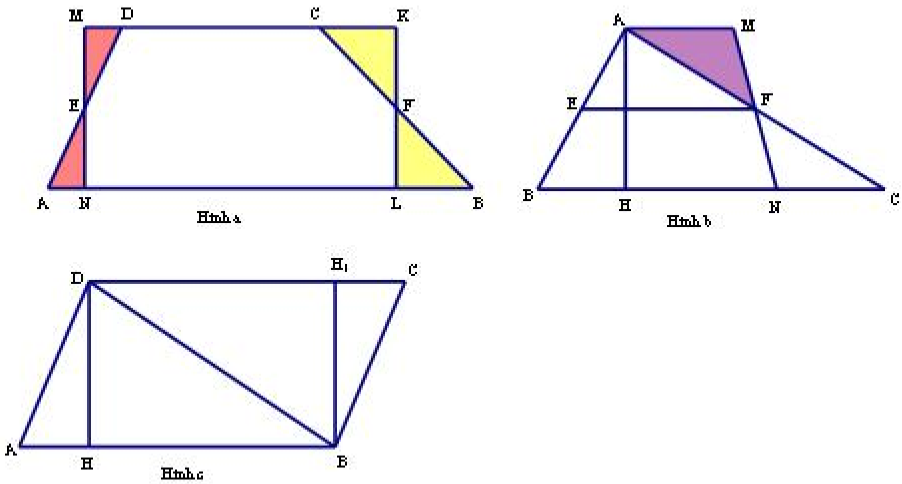
ii. *Với hình thang tùy ý T, số S(T) bằng tích đường trung bình và đáy.*

iii. *Với tam giác tùy ý H, số S(H) bằng nửa độ dài một cạnh nhân với đường cao tương ứng.*

iv. *Với hình bình hành bất kỳ B, số S(B) bằng tích một cạnh với đường cao tương ứng.*

Chứng minh.

Kết quả i đã có ở trên. Kết quả ii hiển nhiên trên hình vẽ 1.3. Xét iii.



Hình 1.3:

$$S_{ABC} = S_{AFNB} + S_{FNC} = S_{BNMA} = EF.AH = \frac{1}{2}BC.AH$$

Cuối cùng xét iv.

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}AB.DH + \frac{1}{2}CD.BH_1 = AB.DH.$$

Hệ quả được chứng minh.

Như vậy vấn đề còn lại là tồn tại hay không hàm S(F)?

Gọi AB là một cạnh của đa giác F, nếu H là điểm không kỳ dị trên cạnh này thì tồn tại hình tròn B(H, ε) sao cho hình $F_1 = F \cap B(H, \varepsilon)$ là một nửa hình tròn. Tồn tại tia [HN) thỏa mãn 2 điều kiện sau:

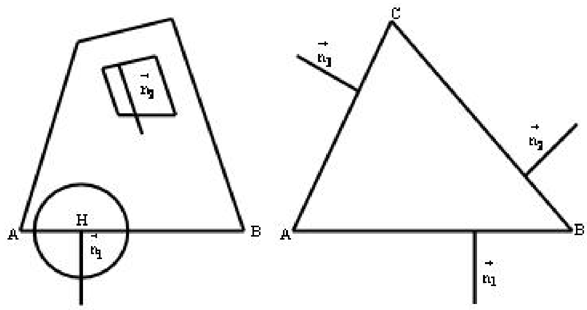
+ [HN) vuông góc với đường thẳng (AB).

+ $[HN) \cap B(H, \varepsilon) \backslash F_1 \neq \emptyset$.

Véc tơ đơn vị $\overrightarrow{n_1}$ có hướng cùng hướng với tia [HN) được gọi là pháp véc tơ đơn vị ngoài của đa giác F. Như vậy với mỗi cạnh của đa giác F ta đều xác định được pháp véc tơ đơn vị ngoài. Giả sử đa giác F có k cạnh. Ta ký hiệu l_i là độ dài cạnh thứ i; $\overrightarrow{n_i}$ là pháp véc tơ đơn vị ngoài ứng với cạnh này; H_i là điểm nào đó trên đường thẳng chứa cạnh thứ i. Lấy điểm O trên mặt phẳng của đa giác F và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{k} l_i \overrightarrow{OH_i}.\overrightarrow{n_i}. \tag{1.1}$$

Tổng này không phụ thuộc vào việc chọn điểm O, không phụ thuộc vào việc chọn điểm H_i trên đường thẳng chứa cạnh thứ i của đa giác.



Hình 1.4: