ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THẮM

HIỆU CHỈNH PHƯƠNG TRÌNH HAMMERSTEIN VỚI NHIỄU KHÔNG ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THẮM

HIỆU CHỈNH PHƯƠNG TRÌNH HAMMERSTEIN VỚI NHIỄU KHÔNG ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo GS.TS. Nguyễn Bường - Viện Công nghệ Thông tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và kính chúc thầy luôn luôn mạnh khỏe.

Tôi xin bày tỏ lời cảm ơn chân thành đến cô giáo TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng các thầy cô giáo tham gia giảng dạy khóa cao học 2012 - 2014, những người đã đem tâm huyết và sự nhiệt tình để giảng dạy, trang bị cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống.

Tôi cũng muốn bày tỏ lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô cùng toàn thể bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 10 năm 2014.

Người thực hiện

Nguyễn Thị Thắm

Mở đầu

Nhiều bài toán trong khoa học, kỹ thuật đề cập đến vấn đề tìm nghiệm $x(t)$ của phương trình tích phân

$$x(t) + \int_a^b K(t,s)G(x(s))ds = f(t),$$

trong đó $K(t,s)$ và $f(t)$ là các hàm cho trước. Nếu ta ký hiệu

$$(F_2y)(t) = \int_a^b K(t,s)y(s)ds, \quad (F_1x)(t) = G(x(t)),$$

thì ta có phương trình toán tử $x + F_2F_1(x) = f$. Phương trình này được nhà toán học Đức A. Hammerstein đề xuất. Sau đó một lý thuyết chung về tồn tại cũng như duy nhất nghiệm cho phương trình toán tử trên được chứng minh bởi H. Amann, H. Bresiz, F.Browder, D. Defigueiredo, C. Gupta, W. Petryshyn và L. Tartar $\cdots$ (xem [7]).

Phương trình $x + F_2F_1(x) = f$ đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng tựa tuyến tính, bài toán điều khiển tối ưu, cơ học và đặc biệt trong việc nghiên cứu các bài toán nảy sinh từ kỹ thuật. Do nhiều bài toán thực tế trong lý thuyết hệ thống có rơle phi tuyến hoặc lý thuyết hệ thống với cấu trúc thay đổi $\cdots$ dẫn đến việc giải phương trình vi tích phân với phần phi tuyến gián đoạn, cho nên bài toán này hiện nay vẫn được các nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu ở nhiều khía cạnh tồn tại và duy nhất nghiệm.

Nội dung chính của luận văn trình bày các kết quả nghiên cứu mới đây của GS.TS. Nguyễn Bường về hiệu chỉnh phương trình Hammerstein với nhiễu không đơn điệu. Kết quả này được trình bày trong bài báo "Solution of the Hammerstein equations under non-monotone perturbations". Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương một trình bày một số khái niệm cơ bản về không gian Banach, toán tử đơn điệu, bài toán đặt không chỉnh và một số vấn đề liên quan đến hiệu chỉnh phương trình Hammerstein.

Chương hai trình bày phương pháp hiệu chỉnh tìm nghiệm của phương trình Hammerstein $x + F_2F_1(x) = f$ khi các toán tử F_i, $i = 1, 2$ được cho xấp xỉ bởi các toán tử F_i^h không có tính đơn điệu.

Một số kí hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{E}^n$	Không gian Euclide n chiều
$D(A)$	Miền xác định của toán tử A
$R(A)$	Miền giá trị của toán tử A
H	Không gian Hilbert thực
C	Tập con lồi đóng của H
I	Ánh xạ đơn vị
P_C	Phép chiếu mêtrix H lên tập con lồi đóng C của H
$x_n \to x$	Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x
$x_n \rightharpoonup x$	Dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số vấn đề cơ bản như khái niệm về không gian Banach, toán tử đơn điệu, bài toán đặt không chỉnh và khái niệm về phương trình toán tử loại Hammerstein. Nội dung của chương này chủ yếu được hình thành từ các tài liệu [1], [2], [3] và [4].

1.1 Không gian Banach

Định nghĩa 1.1. Không gian tuyến tính X được gọi là không gian định chuẩn nếu ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một số gọi là chuẩn của x và được kí hiệu bởi $\|x\|$, thỏa mãn các điều kiện sau:

1) $\|x\| > 0$, $\forall x \neq 0$, $\|x\| = 0$, $\Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$;
3) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$, $\forall x \in X$, $\alpha \in R$;

Không gian định chuẩn đầy đủ được gọi là không gian Banach.

Ví dụ 1.2. Ví dụ về không gian Banach

1) Không gian $\mathbb{E}^n$ với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và chuẩn

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{1/p},$$

trong đó p là một số thực bất kỳ thỏa mãn $1 \leq p < +\infty$. Khi $p = 2$, $\mathbb{E}^n$ gọi là không gian Euclid n chiều.

2) Không gian các dãy số l_p với phần tử $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ và

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right\}^{1/p} < +\infty.$$

3) Không gian các hàm $L_p\,[a, b]$ trong đó mỗi phần tử là hàm đo được $x(s)$ có $x^p(s)$ khả tích với chuẩn được xác định như sau

$$\|x\|_{L_p} = \left\{ \int_a^b |x(s)|^p\, ds \right\}^{1/p} < +\infty.$$

4) Giả sử K là một trường số thực. Ký hiệu $C\,[a, b]$ là không gian các hàm liên tục trên đoạn hữu hạn $[a, b]$. Bởi vì mọi hàm liên tục trên một đoạn là bị chặn nên ta có thể xác định

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\,, f \in C\,[a, b]\}\,.$$

Dễ thấy rằng hàm $f \to \|f\|$ xác định như trên là một chuẩn trên không gian $C\,[a, b]$. Như vậy $C\,[a, b]$ là một không gian định chuẩn. Sự hội tụ trong $C\,[a, b]$ đối với chuẩn này chính là sự hội tụ đều. Ta sẽ kiểm tra $C\,[a, b]$ là một không gian Banach nghĩa là mọi dãy Cauchy trong đó đều hội tụ.

Thật vậy, cho $\{f_n\}$ là một dãy Cauchy trong $C\,[a, b]$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n_0, với mọi $m, n > n_0$, với mọi $x \in [a, b]$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

Như vậy, với mỗi ε cố định dãy số là một dãy Cauchy trên trường K. Do K đầy đủ nên tồn tại

$$f(x) = \lim_{x \to \infty} f_n(x), \quad \forall x \in [a, b]\,.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng $f \in C\,[a, b]$ nghĩa là f liên tục trên $[a, b]$ và $f_n \to f$ trong $C\,[a, b]$. Trong (1.1) bằng cách cố định $x \in [a, b]$ và $n \geq n_0$, cho $m \to \infty$ ta được

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b]\,, \quad n \geq n_0. \tag{1.2}$$

Vì f_{n_0} liên tục tại x_0 nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \le \varepsilon,\ \forall\, |x - x_0| < \delta, \quad \forall x \in [a, b]\,.$$

Từ (1.2) suy ra bất đẳng thức

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| \le & \,|f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \\ & + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \le 3\varepsilon, \end{aligned}$$

xảy ra với mọi $x \in [a, b]$, $|x - x_0| < \delta$. Vậy từ (1.2) suy ra dãy $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến f trong $C\,[a, b]$.

5) Không gian Sobolev

Cho Ω là một miền giới nội trong $\mathbb{E}^n$ và $x \in C^l(\Omega)$ là hàm khả vi liên tục đến cấp l. Vì $\overline{\Omega}$ là compact nên với mỗi $l = 0, 1, 2, \cdots$, $C^l(\Omega) \subseteq L_p(\Omega)$. Do đó, ta có thể xác định được

$$\|x\|_{\mathrm{W}_p^l(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \le l} \|D^\alpha x\|_{L_p(\Omega)}^p \right\}^{1/p},$$

cho mỗi $x \in C^l(\Omega)$, $p \ge 1$.

Không gian Sobolev $\mathrm{w}_p^l(\Omega)$ là một không gian tạo bởi $C^l(\Omega)$ được làm đủ bằng chuẩn trên. Ta thấy với mọi $x \in C^l(\Omega)$: $\|x\|_{L_p(\Omega)} \le \|x\|_{\mathrm{W}_p^l(\Omega)}$.

Trường hợp đặc biệt của không gian Banach không gian Hilbert

Định nghĩa 1.3. Cặp $(H, \langle , \rangle)$ trong đó H là một không gian tuyến tính và

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : H \times H &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

1) $\langle x, x \rangle \ge 0, \forall x \in H$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in H$;
3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\forall \lambda \in R$, $\forall x, y \in H$;
4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in H$,

được gọi là không gian tiền Hilbert. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.