ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ NGA

GIẢ THUYẾT GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH SMALE VÀ ĐỘNG HỌC PHỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ NGA

GIẢ THUYẾT GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH SMALE VÀ ĐỘNG HỌC PHỨC

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới các Thầy Cô giáo trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, các Thầy Cô giáo dạy cao học chuyên ngành Toán ứng dụng đã cho tôi những kiến thức toán học căn bản.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Tạ Duy Phượng. Tôi xin gửi lời cảm ơn tới PGS. TS. Tạ Duy Phượng, người đã hướng dẫn nghiêm túc về chuyên môn trong suốt thời gian qua để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn đối với gia đình, bạn bè và người thân đã động viên khuyến khích và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn này.

Hà Nội, ngày 25 tháng 7 năm 2014

Tác giả

Nguyễn Thị Nga

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Khi nghiên cứu độ phức tạp tính toán và tính hiệu quả của thuật toán Newton giải phương trình đa thức phức, Smale đã chứng minh một bất đẳng thức, sau này được gọi là *bất đẳng thức Smale*. Từ bất đẳng thức này, Ông đã đưa ra một giả thuyết, sau này được gọi là *giả thuyết giá trị trung bình Smale*.

Từ giả thuyết giá trị trung bình Smale (ngắn gọn: Giả thuyết Smale), nhiều vấn đề và giả thuyết mới nảy sinh: Chứng minh và mở rộng Giả thuyết Smale, Quan hệ giữa Giả thuyết Smale với động học phức, Quan hệ giữa Giả thuyết Smale với các vấn đề của toán học tính toán,…

Động học phức (complex dynamics) nghiên cứu dáng điệu và đặc biệt là tính hội tụ của một dãy giá trị của hàm phức $f(z)$ xuất phát từ một điểm ban đầu z_0 qua phép lặp $f^{k+1}(z_0) = f(f^k(z_0))$. Dãy các điểm $\left\{ f^k(z_0) \right\}$ được gọi là *quĩ đạo* của hàm f xuất phát từ điểm ban đầu z_0.

Xuất phát từ giá trị ban đầu z_0, ánh xạ Newton $N_P(z) = z - \dfrac{P(z)}{P'(z)}$ với $P(z)$ là đa thức, cho một dãy các giá trị $\left\{ N_P^k(z_0) \right\}$, trong đó $N_P^{k+1}(z_0) = N\left(N_P^k(z_0) \right)$. Như vậy, dãy các giá trị $\left\{ N_P^k(z_0) \right\}$ tạo thành một quĩ đạo xuất phát từ z_0. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là: Xuất phát từ điểm z_0 nào thì thuật toán Newton hội tụ?

Như vậy, ta thấy động học phức liên quan chặt chẽ với thuật toán Newton và có thể giúp soi sáng hơn giả thuyết giá trị trung bình Smale. Nghiên cứu mối quan hệ giữa động học phức với thuật toán Newton và giả thuyết Smale là một vấn đề thời sự và thú vị của toán lý thuyết, giải tích số và toán ứng dụng.

Luận văn *Giả thuyết giá trị trung bình Smale và động học phức* trình bày mối quan hệ giữa động học phức với sự hội tụ của thuật toán Newton và giả thuyết giá trị trung bình của Smale, dựa theo cuốn sách [4] và các bài báo [6], [7].

Nội dung của luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Trình bày một số kiến thức của giải tích phức (đa thức phức, ánh xạ phân thức và ánh xạ chỉnh hình, ánh xạ Mobius và hàm liên hợp,…). Nghiên cứu động lực học trên mặt phẳng phức (tập Fatou và tập Julia), trình bày Thuật toán Newton cho đa thức, Phương pháp lặp Newton, tính hội tụ của phương pháp Newton.

Chương 2: Trình bày giả thuyết giá trị trung bình Smale, mối quan hệ giữa động lực học phức với giả thuyết giá trị trung bình Smale và sự phát triển giả thuyết Smale.

Chương 1

ĐỘNG HỌC PHỨC VÀ THUẬT TOÁN NEWTON

1.1 Một số khái niệm cơ bản của giải tích phức

1.1.1 Số phức

Kí hiệu $\sqrt{-1}=i$ được gọi là *đơn vị ảo*. *Số phức* là các số dạng $z=x+iy,$ trong đó x và y là hai số thực. Tập tất cả các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}.$

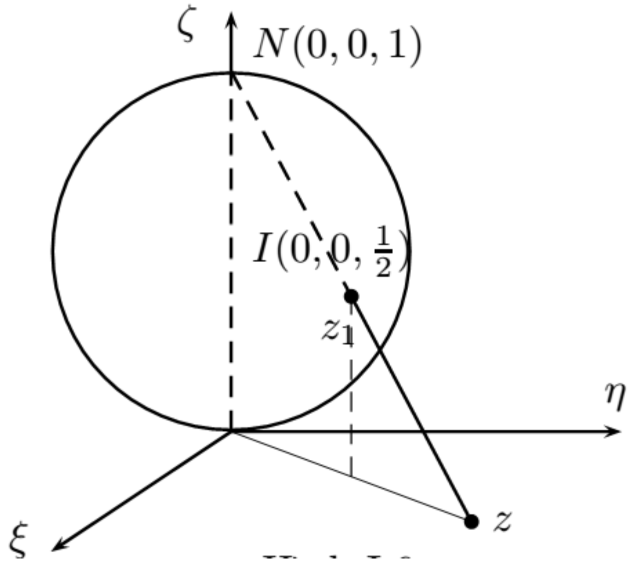
Số $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ được gọi là *môđun* của số phức $z=x+iy.$

Mặt phẳng phức Mỗi số phức $z=x+iy$ cho tương ứng với một điểm M có tọa độ (x,y) trong mặt phẳng Eclid hai chiều và môđun của số phức z chính là độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM},$ tức là $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\left|\overrightarrow{OM}\right|.$ Ngược lại, mọi điểm $M(x,y)$ trên mặt phẳng Eclid hai chiều tương ứng với số phức $z=x+iy.$ Do đó ta có tương ứng một-một giữa tập hợp số phức $\mathbb{C}$ với mặt phẳng Eclid hai chiều. Mặt phẳng này được gọi là *mặt phẳng phức*.

Mặt cầu Riemann Để hiểu rõ bản chất của điểm vô cùng trên mặt phẳng phức, cũng như sử dụng trong nghiên cứu dáng điệu của hàm số tại vô cùng, Riemann đã biểu diễn tập hợp các số phức theo cách sau.

Định nghĩa 1.1.1 *Mặt cầu Riemann* S là mặt cầu trong không gian Euclid ba chiều với hệ tọa độ Descartes vuông góc $0xy\zeta$ có tâm là điểm $I(0,0,\frac{1}{2}),$ bán kính $r=\frac{1}{2}$ và phương trình $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta,$ hay $\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$

Kí hiệu $N(0,0,1)$ là điểm cực bắc của mặt cầu, $z_1\in S$ là một điểm bất kì nào đó khác N trên mặt cầu. Đường thẳng Nz_1 cắt mặt phẳng $0xy$ tại $z.$ Ngược lại, lấy $z\in 0xy,$ nối Nz cắt S tại $z_1.$ Như vậy, ta có một tương ứng một-một giữa mặt cầu Riemann và mặt phẳng phức. Phép tương ứng trên được gọi là *phép chiếu nổi* và z_1 được gọi là *điểm Riemann* của số phức z. Khi z_1 dần đến điểm cực bắc N, tia Nz_1 tiến dần tới tia song song với mặt phẳng $0xy$. Do đó, ta có thể xem điểm $N \in S$ ứng với điểm $z = \infty$ và mặt cầu Riemann tương ứng với mặt phẳng phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$ gồm tất cả các điểm trên mặt phẳng phức bổ sung thêm điểm $z = \infty$.



Trên đây ta mới thiết lập sự tương ứng giữa các điểm của mặt cầu S với mặt phẳng phức thông qua hình học. Ta cũng có thể thiết lập sự tương ứng giữa chúng bằng các hệ thức đại số. Theo giả thiết ba điểm $N(0,0,1)$, $z_1(\xi,\eta,\zeta)$ và $z(x,y,0)$ thẳng hàng. Do đó, ta có biểu thức:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1}.$$

Suy ra

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta},\ y = \frac{\eta}{1-\zeta}.$$

Vậy

$$z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}.$$

Mặt khác, vì $z_1(\xi,\eta,\zeta)$ nằm trên mặt cầu S nên $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta$. Từ đó suy ra

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta - \zeta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

Vậy ta được

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Công thức trên cho thấy sự tương ứng một-một giữa tập hợp các số phức và tập hợp các điểm trên mặt cầu S, và điểm N tương ứng với điểm $z = \infty$ của mặt phẳng phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$.

1.1.2 Dãy số phức

Định nghĩa 1.1.2 Dãy số $\{z_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến điểm $\overline{z} \in \mathbb{C}$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số tự nhiên N sao cho $|z_n - \overline{z}| < \varepsilon$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ mà $n > N$.

Nếu $\{z_n\}$ hội tụ đến $\overline{z}$ thì ta viết: $\overline{z} = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ hay $z_n \to z_0$.

1.1.3 Hàm phức

Một ánh xạ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cho tương ứng mỗi số phức một giá trị phức được gọi là *hàm số của biến số phức*, hay *hàm phức*.

Định nghĩa 1.1.3 Điểm $\xi \in \mathbb{C}$ được gọi là *nghiệm* (hoặc *không điểm*) của hàm $f(z)$ nếu $f(\xi) = 0$.

Điểm $\overline{z} \in \mathbb{C}$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ f nếu ta có $f(\overline{z}) = \overline{z}$.

Nhận xét rằng điểm bất động của hàm f cũng chính là nghiệm của phương trình $F(z) = f(z) - z = 0$.

Giả sử D, U, V là các tập nào đó trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Hai hàm $f : D \to U$, $g : U \to V$ cho trước. *Hàm hợp* của hai hàm và là hàm $\varphi : D \to V$ được xác định bởi công thức sau

$$\varphi(z) = (f \circ g)(z) = f(g(z)).$$

Đôi khi ta cũng viết $\varphi = fg$. Nói chung $fg \neq gf$.

Giả sử D là một tập mở trong tập số phức $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.1.4 Hàm số $f: D \to \mathbb{C}$ được gọi là *có giới hạn* M khi z tiến tới điểm $z_0 \in D$ nếu với mỗi dãy $z_n \to z_0$ ta có dãy $f(z_n) \to M$.

Định nghĩa trên tương đương với: Hàm số $f: D \to \mathbb{C}$ được gọi là *có giới hạn* M khi z tiến tới điểm $z_0 \in D$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|f(z) - M| < \varepsilon$ với mọi $z \in D$ mà $|z - z_0| < \delta$.

Khi hàm số có giới hạn M, ta viết $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = M$.

Định nghĩa 1.1.5 Hàm số $f: D \to \mathbb{C}$ được gọi là *liên tục* tại điểm $x_0 \in D$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ với mọi $z \in D$ mà $|z - z_0| < \delta$.

Nếu f liên tục tại mọi điểm của D thì f được gọi là *liên tục trên* D.

Định nghĩa 1.1.6 Hàm số $f: D \to \mathbb{C}$ được gọi là *khả vi phức* tại điểm $z_0 \in D$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $\lambda: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sao cho

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z_0 + z) - f(z_0) - \lambda(z)|}{|z|} = 0.$$

Định nghĩa trên tương đương với: Nếu $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{|z|}$ tồn tại thì ta nói hàm số $f: D \to \mathbb{C}$ được gọi là *khả vi* (*có đạo hàm*) tại điểm $z_0 \in D$.

Kí hiệu đạo hàm của hàm số $f: D \to \mathbb{C}$ tại điểm $z_0 \in D$ là $f'(z_0)$. Ta có

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{|z|}.$$

Định nghĩa 1.1.7 Điểm $\xi \in \mathbb{C}$ được gọi là *điểm tới hạn* của $f(z)$ nếu $f'(\xi) = 0$. Giá trị $\omega = f(\xi)$ với ξ là điểm tới hạn của f, được gọi là *giá trị tới hạn* của f.

Trong nhiều trường hợp, hàm khả vi tại một điểm $z_0 \in D$ là chưa đủ để nghiên cứu các tính chất của hàm phức. Vì vậy ta cần định nghĩa sau.